Eine Verbindung zwischen quasi-erblichen Algebren und lokalen, selbstinjektiven Algebren

Daiva Pučinskaitė

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Fakultät für Mathematik

Universität Bielefeld

September 2009

1. Gutachter: Prof. Dr. Dr. phil.h.c. Claus Michael Ringel

2. Gutachter: Prof. Dr. Rolf Farnsteiner

Datum der mündlichen Prüfung: 19. Oktober 2009

» … war ich mir doch fast schon sicher, dass
alle temporären und lokalen Lebensthemen
nur Derivate des Abstrakten sind.«

Roland Hüls

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier nach ISO 9706.

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung

Ein großer Bereich der Darstellungstheorie befasst sich mit der Klassifikation der Darstellungen bzw. Moduln einer Algebra. Es geht um die Beschreibung von Operationen einer Algebra auf einem Vektorraum, die ihm eine Modul-Struktur verleihen. Einen wichtigen Platz in diesem Zusammenhang nehmen endlich dimensionale assoziative K-Algebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K an. Die Klassifikation von (unzerlegbaren) Darstellungen von endlich dimensionalen K-Algebren steht in Verbindung zu ihrer Struktur.
Man befasst sich vorwiegend mit der Einteilung von endlich dimensionalen K-Algebren in drei Typen. Zum einen mit K-Algebren von endlichem Darstellungstyp, sie haben bis auf Isomorphie endlich viele unzerlegbare Moduln. Zum anderen mit K-Algebren vom unendlichen Darstellungstyp, wenn sie bis auf Isomorphie unendlich viele Moduln haben. Die Letzteren teilt man in K-Algebren vom zahmen Darstellungstyp (mit einer gewissen Parametrisierung aller unzerlegbaren Moduln) und in K-Algebren vom wilden Darstellungstyp.
Nach der Morita-Theorie existiert zu jeder endlich dimensionalen K-Algebra A (bis auf Isomorphie) genau eine Basis-Algebra $\mathtt{A}$. Die Kategorie mod-A von endlich dimensionalen (links) A-Moduln ist zu der Kategorie von endlich dimensionalen (links) $\mathtt{A}$-Moduln mod-$\mathtt{A}$ äquivalent. Die Struktur einer Basis-Algebra und deren Moduln kann durch sogenannte *Köcher und Relationen* dargestellt werden. Sie liefern die wichtigsten Informationen zu der Kategorie von A-Moduln (der Köcher von $\mathtt{A}$ ist eindeutig bestimmt, es gibt aber mehrere Mengen dazugehöriger Relationen, deren Elemente erzeugen dasselbe Ideal der Wegealgebra zum Köcher von $\mathtt{A}$). Aufgrund der Äquivalenz von mod-A und mod-$\mathtt{A}$ vereinfacht sich die Beschreibung von A-Moduln, indem entsprechende $\mathtt{A}$-Moduln betrachtet werden. Köcher und Relationen, die $\mathtt{A}$ darstellen, nennt man dann Köcher und Relationen von A.
Besteht die Menge der Relationen von A nur aus dem 0-Element, so spricht man von einer erblichen K-Algebra (die erblichen K-Algebren vom endlichen und zahmen Darstellungstyp sind bereits klassifiziert, ebenso deren unzerlegbare Moduln).
Erbliche K-Algebren sind eine Unterklasse von quasi-erblichen K-Algebren, die von Cline, Parshall und Scott definiert wurden [CPS]. Spezifisch für quasi-erbliche K-Algebren ist, dass bezüglich einer Halbordnung auf der Menge der Punkte des zugehörigen Köchers sogenannte Standard- bzw. Kostandardmoduln bestimmt werden. Weiterhin besitzen alle projektiven bzw. injektiven Moduln eine Δ- bzw. ∇-Filtrierung, deren Kompositionsfaktoren Standard- bzw. Kostandardmoduln sind.
Quasi-erbliche K-Algebren wurden im Zusammenhang mit dem Studium zur Kategorie $\mathcal{O}$ von einfachen komplexen endlich dimensionalen Lie-Algebren definiert, die von Bernstein, Gelfand, Gelfand eingeführt wurde [BGG1]. Jeder Block der Kategorie $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ (hier ist $\mathfrak{g}$ eine einfache endlich dimensionale komplexe Lie-Algebra) kann als Modulkategorie einer Basis-Algebra beschrieben werden [So], d.h. einer $\mathbb{C}$-Algebra $A_\lambda(\mathfrak{g})$, die durch einen Köcher und Relationen dargestellt wird, welche mit λ, dem höchsten Gewicht eines unzerlegbaren Blocks von $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$, zusammenhängt. Die Punkte des Köchers von $A_\lambda(\mathfrak{g})$ korrespondieren mit den Elementen der Faktorgruppe $W(\mathfrak{g})/W_\lambda(\mathfrak{g})$, der zu $\mathfrak{g}$ gehörenden Weyl-Gruppe $W(\mathfrak{g})$. Weiterhin induziert die Bruhat-Ordnung auf den Elementen von $W(\mathfrak{g})$ eine Halbordnung auf den Punkten des Köchers. Bezüglich dieser Halbordnung ist die $\mathbb{C}$-Algebra $A_\lambda(\mathfrak{g})$ quasi-erblich mit einer Dualität auf mod-$A_\lambda(\mathfrak{g})$, die die einfachen Moduln festhält, also eine sogenannte BGG-Algebra. Sind zwei Elemente dieser Faktorgruppe bzgl. der Bruhat-Ordnung benachbart, so sind die korrespondierenden Punkte des Köchers mit zwei Pfeilen in entgegengesetzten Rich-

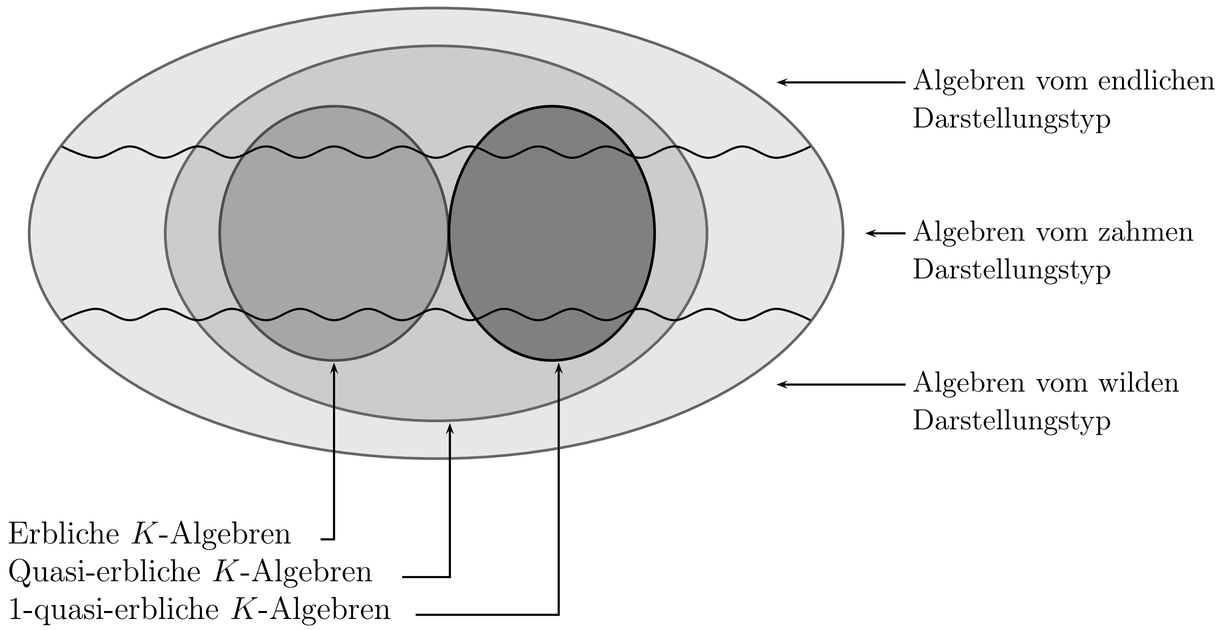
tungen miteinander verbunden. Sind w und w' in $W(\mathfrak{g})/W_\lambda(\mathfrak{g})$ nicht benachbart, dann gibt es zwar einige Methoden für die Bestimmung der Verbindungen zwischen den entsprechenden Punkten im Köcher, dennoch gibt es keinen expliziten Ausdruck, der die Anzahl der Pfeile von i_w nach $i_{w'}$ für jede einfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ beschreibt. Diese Anzahl steht jedoch in einem direkten Zusammenhang mit den Multiplizitäten in einer Jordan-Hölder-Reihe von Standard- und in einer Δ-Filtrierung von projektiven unzerlegbaren Moduln. Daraus entstand die Idee, diejenigen Faktoralgebren von $A_\lambda(\mathfrak{g})$ zu betrachten, die von den Unterköchern des Köchers von $A_\lambda(\mathfrak{g})$ (und den zugehörigen Relationen) beschrieben sind, von denen nur die benachbarten Punkte verbunden sind. Ein besonderer Aspekt solcher $\mathbb{C}$-Algebren ist, dass sie mit der induzierten Halbordnung auch quasi-erbliche BGG-Algebren sind und jeder "erlaubte" einfache bzw. Standardmodul in einer Jordan-Hölder-Reihe bzw. einer Δ-Filtrierung jedes Standard- bzw. jedes projektiven unzerlegbaren Moduls genau ein Mal vorkommt. Begrenzt man die Betrachtung auf jene Algebren, für die genau ein minimales und genau ein maximales Element bezüglich der vorhandenen Halbordnung existiert, so stellt sich eine bemerkenswerte Eigenschaft von projektiven bzw. Standardmoduln heraus, die an das maximale bzw. minimale Element geknüpft ist: Eine projektive Decke eines einfachen Moduls S, der zu dem maximalen Element korrespondiert, ist auch seine injektive Hülle und alle projektiven unzerlegbaren Moduln sind Untermoduln von ihm, d.h. der Sockel jedes projektiven unzerlegbaren Moduls ist zu S isomorph. Und alle Standardmoduln sind Untermoduln von dem zum minimalen Punkt korrespondierenden Standardmodul.
Dies führte zu erweiterten Betrachtungen aller (endlich dimensionalen) quasi-erblichen K-Algebren A, für die

- bezüglich der gegebenen Halbordnung auf den Punkten des Köchers genau ein minimales und genau ein maximales Element existiert,
- für die die Multiplizitäten aller "erlaubten" einfachen bzw. Standardmoduln in einer Jordan-Hölder-Reihe von Standard- bzw. in einer Δ-Filtrierung von projektiven unzerlegbaren A-Moduln immer gleich 1 sind,
- der Sockel jedes projektiven unzerlegbaren A-Moduls zu dem einfachen Modul isomorph ist, der zu dem maximalen Punkt korrespondiert und
- jeder Standard- bzw. Kostandardmodul ein Unter- bzw. Faktormodul des Standard- bzw. Kostandardmoduls ist, der zu dem minimalen Punkt korrespondiert.

K-Algebren mit diesen Bedingungen werden in dieser Arbeit 1-quasi-erblich genannt. Ihnen gilt das Hauptinteresse unserer weiteren Betrachtungen.

Das nachfolgende Bild visualisiert den symbolischen Platz der Klasse von 1-quasi-erblichen K-Algebren in der *Welt* aller (endlich dimensionalen) K-Algebren. Es zeigt, dass die 1-quasi-erblichen K-Algebren bis auf K-Algebra K nicht erblich sind und damit gewinnen gewisse Umformungen von Relationen an Bedeutung. Bemerkenswert ist zwar auch, dass sich ihr Bereich über alle drei Ebenen der Darstellungstypen erstreckt, darauf gehen wir hier aber nicht weiter ein. Es existieren auch Schnittstellen mit anderen Unterklassen von quasi-erblichen K-Algebren wie z.B. Auslander Algebren, BGG-Algebren, Schur-Algebren und auch die die Kategorie $\mathcal{O}$ beschreibenden Algebren. Diese Thematik wird in dieser Arbeit jedoch nicht weitergehend behandelt (und auch im Bild nicht visualisiert).

Endlich dimensionale K-Basis-Algebren mit einer Halbordnung auf den Punkten des zugehörigen Köchers



Die Darstellungstheorie ist mit verschiedenen mathematischen Gebieten thematisch verbunden und schafft damit *Brücken*. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine Verbindung zwischen der Klasse der 1-quasi-erblichen K-Algebren sowie von lokalen, selbstinjektiven K-Algebren herzustellen. Wir werden zeigen, dass sich für jede 1-quasi-erbliche K-Algebra A eine endlich dimensionale, lokale, selbstinjektive K-Algebra $L(A)$ und eine Basis $\mathfrak{L}(A)$ zuordnen lässt, so dass $A \cong \mathrm{End}_{L(A)}\left(\bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{L}(A)} L(A)\cdot\mathfrak{b}\right)$ gilt. Die K-Algebra $L(A)$ ist die Endomorphismenalgebra des projektiven unzerlegbaren A-Moduls der zu dem maximalen Punkt des Köchers von A korrespondiert und die Basis $\mathfrak{L}(A)$ erfüllt folgende Eigenschaft: Die Halbordnung $\leqslant$ induziert eine Halbordnung auf die Elemente von $\mathfrak{L}(A)$, für jedes $\mathfrak{b}\in\mathfrak{L}(A)$ gilt $\mathrm{rad}\,(L\cdot\mathfrak{b}) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}'\in\mathfrak{L}(A)\\ \mathfrak{b}'<\mathfrak{b}}} L\cdot\mathfrak{b}'$ und es gibt ein $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{L}(A)$ mit der Eigenschaft $L\cdot\mathfrak{b} = L(A)$. Wenn eine Basis einer endlich dimensionalen, lokalen, selbstinjektiven K-Algebra zusammen mit einer Halbordnung $\preccurlyeq$ die o.g. Eigenschaft besitzt, dann bezeichnen wir sie mit $\boxed{\preccurlyeq}$.
Das wichtigste Resultat dieser Arbeit zeigt, dass diese Zuordnung eine Bijektion zwischen 1-quasi-erblichen K-Algebren mit der Dualität D_ϵ und einer Klasse von lokalen, selbstinjektiven K-Algebren, die Basen mit der Eigenschaft $\boxed{\preccurlyeq}$ besitzen, liefert (die Dualität D_ϵ wird von einem Antiautomorphismus ϵ induziert, der die Pfeile in dem Köcher einer 1-quasi-erblichen K-Algebra vertauscht):

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Isomorphieklassen von}\\ \text{1-quasi-erblichen } K\text{-Algebren}\\ \text{mit der Dualität } D_\epsilon\end{array}\right\} \rightleftarrows \left\{\begin{array}{l}\text{Äquivalenzklassen von endlich dimensionalen}\\ \text{kommutativen, lokalen, selbstinjektiven}\\ K\text{-Algebren und Basen mit der Eigenschaft } \boxed{\preccurlyeq}\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{ccc} [A,\leqslant] & \longmapsto & \big[L(A),\big(\mathfrak{L}(A),\leqslant\big)\big] \\ \left[\mathrm{End}_L\left(\bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{L}} L\cdot\mathfrak{b}\right)\right] & \longleftarrow\!\!\shortmid & [L,(\mathfrak{L},\preccurlyeq)] \end{array}$$

Der Beweis dafür basiert auf den Theoremen von Tachikawa [T] und Dlab, Heath und Marko [DHM].

Im ersten Kapitel werden die grundlegenden Begriffe aus der Modultheorie eingeführt und solche Eigenschaften beschrieben, die in dieser Arbeit verwendet werden. Die Beweise dafür sind in der allgemeinen Literatur zu finden oder leicht zu verifizieren. Weiterhin wird eine 1-quasi-erbliche K-Algebra definiert und es werden einige Beispiele gezeigt, die zur Illustration von verschiedenen Aussagen über die 1-quasi-erblichen K-Algebren eingesetzt werden. Aus den Eigenschaften, die im ersten Kapitel beschrieben sind, werden im Kapitel 2 der Köcher und einige Relationen einer 1-quasi-erblichen K-Algebra ermittelt. Dabei spielen sogenannte steigende und fallende Wege eine Hauptrolle. Es zeigt sich, dass sich aus diesen Wegen eine Basis einer 1-quasi-erblichen K-Algebra bestimmen lässt, die die Struktur von projektiven unzerlegbaren Moduln als Moduln der eigenen Endomorphismenalgebra wiederspiegelt. Außerdem können mit Hilfe dieser Basis alle Δ- bzw. ∇-Filtrierungen von projektiven bzw. injektiven unzerlegbaren Moduln bestimmt werden und einige Aussagen über den charakteristischen Kippmodul, der auch einen wichtigen Platz in der Theorie von quasi-erblichen K-Algebren einnimmt, gemacht werden.
Die Verbindung zwischen 1-quasi-erblichen K-Algebren und lokalen, selbstinjektiven K-Algebren wird in Kapitel 3 beschrieben. Somit folgt aus der bereits erwähnten Zuordnung, dass die Klassifikation von 1-quasi-erblichen K-Algebren in einer Beziehung zur Klassifikation von endlich dimensionalen, lokalen, selbstinjektiven K-Algebren steht.

Abschließend werden einige Konstruktionsverfahren beschrieben, die zeigen, dass die Klasse von 1-quasi-erblichen K-Algebren und auch die der (kommutativen) lokalen, selbstinjektiven K-Algebren derzeit nicht einfach zu beschreiben ist.

HERZLICHER DANK: Ich danke meinen Mentoren Herrn Prof. Dr. Rolf Farnsteiner und Herrn Prof. Dr. Dr. phil.h.c. Claus Michael Ringel für ihre wichtigen Hinweise und hilfreichen Anmerkungen.

KAPITEL 1

1-quasi-erbliche Algebren

In diesem Kapitel betrachten wir eine Unterklasse von quasi-erblichen K-Algebren, die wir aufgrund ihrer spezifischen Eigenschaften 1-quasi-erblich nennen werden. Sie sind der Hauptgegenstand dieser Arbeit und werden im zweiten Abschnitt definiert. Um ein erstes Interesse für die Thematik anzuregen, betrachten wir einige Beispiele und Gegenbeispiele.
Das Maßgebende der 1-quasi-erblichen K-Algebren liegt in den Bedingungen der Standard- sowie projektiven unzerlegbaren Moduln, die in der Definition gestellt werden. Im dritten Abschnitt werden einige daraus folgende Eigenschaften abgeleitet, die wichtige Informationen über die Struktur einer 1-quasi-erblichen Algebra liefern.
Aus der Definition von 1-quasi-erblichen K-Algebren folgt, dass die Betrachtung einer solchen Algebra A auf die Betrachtung eines A-Moduls reduziert werden kann. Um die Besonderheiten dieses Moduls deutlicher zu machen, betrachten wir im vierten Abschnitt einige seiner Unter- und Faktormoduln.

1.1 Grundlagen und Bezeichnungen

Zum Verständnis der Thematik werden allgemeine Kenntnisse in der Modultheorie vorausgesetzt und für die Verwendung der Grundbegriffe in der Darstellungstheorie wird auf [ARS], [ASS], [R1] verwiesen.
Im Rahmen eines kurzen Exkurses in die allgemein bekannte Terminologie werden wir neben Begriffen, die für unsere Betrachtungen besonders relevant sind, auch neue Notationen einführen, die in der gesamten Arbeit Verwendung finden.
Mit K wird stets ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 bezeichnet. Alle Objekte, die im Bezug zu einem Körper definiert sind, sind als Objekte über K zu verstehen. Mit einer Algebra bezeichnen wir immer eine assoziative, endlich dimensionale K-Algebra mit einem Einselement. Hauptsächlich betrachten wir die Objekte aus mod-$\mathcal{A}$, der Kategorie der endlich dimensionalen links $\mathcal{A}$-Moduln. Deshalb beschäftigen wir uns meistens mit der zu $\mathcal{A}$ gehörenden Basis-Algebra A, denn mod-A und mod-$\mathcal{A}$ sind bekanntlich (Morita) äquivalent. Jede endlich dimensionale Basis-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist durch einen sogenannten Köcher mit Relationen darstellbar. Die Betrachtung der Moduln einer solchen K-Algebra ist auch eng mit dem Köcher und dessen

Relationen verbunden, die sie darstellen.

Für eine Menge Λ bezeichnen wir mit $|\Lambda|$ ihre Kardinalität. Sind $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$, dann bezeichnen wir mit $[m, n]$ die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid m \leq i \leq n\}$. Durch die Pfeile $\hookrightarrow$ bzw. $\twoheadrightarrow$ betonen wir die Injektivität bzw. Surjektivität einer Abbildung.

1.1.1 Algebren und Moduln

Die ausführliche Beschreibung und weitere Details der hier eingeführten Begriffe aus der Darstellungstheorie sind in [ARS], [AF], [Ma] zu finden.

Gebundene Algebra. Ein *Köcher* Q besteht aus einer Menge von Punkten Q_0 und einer Menge von Pfeilen Q_1 und zwei Funktionen $\mathtt{s}, \mathtt{e} : Q_1 \to Q_0$ die jedem Pfeil α seinen Anfangspunkt $\mathtt{s}(\alpha)$, bzw. Endpunkt $\mathtt{e}(\alpha)$ zuordnet, d.h. $\mathtt{s}(\alpha) \xrightarrow{\alpha} \mathtt{e}(\alpha)$ (so ist ein Köcher ein orientierter Graph ohne jegliche Einschränkungen bezüglich der Anzahl von Punkten und Pfeilen, sowie der Pfeilrichtungen und Muster der verbindenden Punkte). In dieser Arbeit werden nur endliche Köcher vorkommen, d.h. solche, in der Q_0 und Q_1 endliche Mengen sind.
Ein *Weg* w, der im Punkt i startet und im Punkt j endet, ist eine Sequenz von Pfeilen $\mathrm{w} = (i|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|j)$, wobei $\alpha_k \in Q_1$ und $\mathtt{s}(\alpha_1) = i$, $\mathtt{e}(\alpha_n) = j$, $\mathtt{e}(\alpha_k) = \mathtt{s}(\alpha_{k+1})$ für alle $k \in [1, n-1]$. Die Anzahl von Pfeilen in der Sequenz, also n, ist die *Länge* von w. Die Wege der Länge 0 heißen *trivial*, sie sind durch die Menge der Punkte Q_0 parametrisiert, d.h. $\{e_i = (i||i) \mid i \in Q_0\}$ ist die Menge der trivialen Wege. Die Wege der Länge 1 sind die Elemente aus Q_1. Manchmal verwenden wir für den Weg w die Bezeichnung $\mathrm{w} = \left(i \xrightarrow{\alpha_1} \mathtt{s}(\alpha_2) \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \mathtt{s}(\alpha_n) \xrightarrow{\alpha_n} j\right)$. Ist α_k für alle $k \in [1, m]$ der einzige Pfeil aus Q_1, der die Punkte $\mathtt{s}(\alpha_k)$ und $\mathtt{e}(\alpha_k)$ verbindet, dann verwenden wir für den Weg w die Bezeichnung $\mathrm{w} = (\mathtt{s}(\alpha_1), \mathtt{s}(\alpha_2), \cdots, \mathtt{s}(\alpha_n), \mathtt{e}(\alpha_n))$. Wenn Missverständisse bezüglich der Punkte-Bezeichnungen ausgeschlossen werden können, wird auf die Komas zwischen den Punkten verzichtet. Ein K-Vektorraum KQ mit der Menge aller Wege von Q als einer Basis und der Verknüpfung

$$\text{für } \mathrm{w} = (i|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|j) \text{ und } \mathrm{w}' = (i'|\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n'}|j') \text{ gilt}$$

$$\mathrm{w}' \cdot \mathrm{w} = \begin{cases} (i|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{n'}|j'), & \text{wenn } i' = j, \\ \mathrm{w}, & \text{wenn } \mathrm{w}' = e_j \\ \mathrm{w}', & \text{wenn } \mathrm{w} = e_{i'} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine assoziative K-Algebra mit dem Einselement $1 = \sum_{j \in Q_0} e_j$. Sie nennt man die *Wegealgebra*, zu Q. Sei KQ^{+n} der von den Wegen der Länge $\geq n$ aufgespannte Untervektorraum von KQ, wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Offensichtlich ist KQ^{+n} ein Ideal von KQ. Ein Ideal I von KQ heißt *zulässig*, wenn $KQ^{+n} \subseteq \mathrm{I} \subseteq KQ^{+2}$ für ein $n \geq 2$. Zulässige Ideale werden meistens durch ihre Erzeuger oder Relationen festgelegt. Eine *Relation* ρ in I ist eine Linearkombination von Wegen $\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_m$ der Länge ≥ 2 mit $\mathtt{s}(\mathrm{w}_i) = \mathtt{s}(\mathrm{w}_j)$, $\mathtt{e}(\mathrm{w}_i) = \mathtt{e}(\mathrm{w}_j)$ für alle $i, j \in [1, m]$, d.h. $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \mathrm{w}_i$, dabei sind λ_i Skalare aus K mit $\lambda_i \neq 0$ für alle $i \in [1, m]$. Wenn $m = 1$, dann heißt eine solche Relation *0-Relation*; wenn $m = 2$ und $\lambda_1 = 1$ sowie $\lambda_2 = -1$, so nennt man eine solche Relation *Kommutativitätsrelation*. Ein zulässiges Ideal I ist von endlich vielen Relationen $\rho_1, \ldots, \rho_r$ erzeugt, d.h. $\mathrm{I} = \langle \rho_1, \ldots, \rho_r \rangle$. Die Faktoralgebra

$KQ/\mathrm{I} = KQ/\langle\rho_1,\ldots,\rho_r\rangle$ nennt man *gebundene* K-Algebra des Köchers Q mit Relationen $\rho_1,\ldots,\rho_r$ oder die durch das Paar (Q,I) dargestellte Algebra (oder auch die durch den Köcher Q mit Relationen $\rho_1,\ldots,\rho_r$ gegebene Algebra).
Manchmal wird eine Relation $\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \mathrm{w}_i$ durch $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^m \cdot\lambda_i\mathrm{w}_i = -\lambda_k\cdot\mathrm{w}_k$ für ein $k\in[1,m]$ ausgedruckt (ist ρ eine Kommutativitätsrelation, so schreiben wir $\mathrm{w}_1=\mathrm{w}_2$). Die Restklassen $\mathrm{w}+\mathrm{I}$ sind Wege aus KQ/I, die wir mit w bezeichnen werden.

Moduln. Sei A eine K-Algebra, die durch das Paar (Q,I) festgelegt ist. Wie wir wissen, besteht eine A-Darstellung oder ein A-Modul M aus den endlich dimensionalen Vektorräumen $\{M_j \mid j\in Q_0\}$ und den linearen Abbildungen $\left\{\varphi_\alpha : M_{\mathsf{s}(\alpha)} \to M_{\mathsf{e}(\alpha)} \mid \alpha\in Q_1\right\}$, so dass für jede Relation $\rho=\sum_{k=1}^m \lambda_k\cdot\mathrm{w}_k$ mit $\mathrm{w}_k = (i|\alpha_1^{(k)},\alpha_2^{(k)},\ldots,\alpha_{n_k}^{(k)}|j)$ gilt:

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k\cdot\left(\varphi_{\alpha_{n_k}^{(k)}}\circ\varphi_{\alpha_{n_k-1}^{(k)}}\circ\cdots\circ\varphi_{\alpha_2^{(k)}}\circ\varphi_{\alpha_1^{(k)}}\right)=0$$

Für M als einen K-Vektorraum gilt dann $M=\bigoplus_{j\in Q_0}M_j$ und für die Operation von KQ/I auf M (es gilt $(\alpha,u)\mapsto\varphi_\alpha(u)$ für $u\in M$) verwenden wir die Bezeichnung $w\cdot u$ (durch das Element vor dem u sollte die Verwechslung mit der skalaren Multiplikation $(\lambda,u)\mapsto\lambda\cdot u$, hier $\lambda\in K$ ausgeschlossen werden). Ein *Untermodul* M' von M ist auch ein A-Modul mit $M'_j\subseteq M_j$ und $\varphi_\alpha(M'_{\mathsf{s}(\alpha)})\subseteq M'_{\mathsf{e}(\alpha)}$. Für den zugehörigen *Faktormodul* M/M' gilt $(M/M')_j = M_j/M'_j$ und $\overline{\varphi}_\alpha(u+M')=\varphi_\alpha(u)+M'$ für alle $j\in Q_0$ sowie $\alpha\in Q_1$.
Die Menge aller Untermoduln von M bezeichnen wir mit $\mathbf{UM}(M)$ und mit $\mathbf{UM}(M\mid M')$ bezeichnen wir die Menge aller Untermoduln von M, die den Untermodul M' enthalten. Die Zuordnung $\mathbf{UM}(M\mid M')\to\mathbf{UM}(M/M')$ mit $U\mapsto U/M'$ ist offensichtlich eine bijektive Abbildung. Ein A-Modul $M\neq 0$ heißt *einfach*, wenn $\mathbf{UM}(M)=\{M,0\}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\dim_K M=1$, d.h. für ein $j\in Q_0$ gilt $\dim_K M_j=1$ und $\dim_K M_i=0$ für alle $i\in Q_0\setminus\{j\}$ sowie $\varphi_\alpha=0$ für alle $\alpha\in Q_1$. Alle A-Moduln mit dieser Eigenschaft sind zueinander isomorph. Einen Repräsentanten aus dieser Klasse bezeichnet man mit $S(j)$, damit ist jeder einfache A-Modul zu einem Modul aus $\{S(j)\mid j\in Q_0\}$ isomorph.
Ein Untermodul M' von M ist *maximal*, wenn der Faktormodul M/M' einfach ist. Der Schnitt aller maximalen Untermoduln von M ist *Radikal* von M und wird mit $\mathrm{rad}M$ bezeichnet. Den Faktormodul $M/\mathrm{rad}M$ nennt man den *Kopf* von M und bezeichnet ihn mit $\mathrm{top}M$. Die Summe aller einfachen Untermoduln von M ist *Sockel* von M und wird mit $\mathrm{soc}M$ bezeichnet.
Eine *Filtrierung* von M ist eine Kette von Untermoduln $\mathcal{F}:\ 0=U_0\subset U_1\subset\cdots\subset U_{n-1}\subset U_n=M$ und U_k/U_{k-1} für alle $k\in[1,n]$ sind die *Faktoren* dieser Filtrierung. Wir verwenden in dieser Arbeit auch folgende Verbindungen zwischen den Köpfen bzw. den Sockeln der Kompositionsfaktoren und M, nämlich $\mathrm{top}M$ ist zu einem Summand von $\bigoplus_{k=1}^n\mathrm{top}\,(U_k/U_{k-1})$ und $\mathrm{soc}M$ zu einem Summand von $\bigoplus_{k=1}^n\mathrm{soc}\,(U_k/U_{k-1})$ isomorph.
Der Tupel $(\dim_K(M_j))_{j\in Q_0}\in\mathbb{N}_0^{|Q_0|}$ ist der *Dimensionsvektor* von $M=\bigoplus_{j\in Q_0}M_j$ und seine Dimension $\dim_K M=\sum_{j\in Q_0}\dim_K(M_j)$. Die j-te Koordinate $\dim_K(M_j)$ bezeichnen wir mit $[M:S(j)]$. Die Dimensionsvektoren der Kompositionsfaktoren von $\mathcal{F}$ stehen mit dem Dimensionsvektor von M in der Beziehung $[M:S(j)]=\sum_{k=1}^n[U_k/U_{k-1}:S(j)]$ zueinander. Somit gilt auch $\dim_K M=\sum_{k=1}^n\sum_{j\in Q_0}[U_k/U_{k-1}:S(j)]$, oder anders gesagt $\dim_K M=\sum_{k=1}^n\dim_K(U_k/U_{k-1})$. Sind die Faktoren einer Filtrierung einfache A-Moduln, dann heißt so eine Kette *Jordan-Hölder-Reihe*. In diesem Fall gilt $n=\dim_K M$ und die Anzahl der zu $S(j)$ isomorphen Faktoren ist $\dim_K(M_j)=[M:S(j)]$.

Sei u ein Element von M, dann bezeichnen wir mit $\langle u \rangle$ den von u erzeugten Untermodul von M. Es gilt also $\langle u \rangle = A \cdot u = \{a \cdot u \mid a \in A\}$ (mit den so gewählten Klammern verweisen wir auf einen links A-Modul). Ein Untermodul M' von M heißt *lokal*, wenn $\mathrm{rad}M'$ der einzige maximale Untermodul von M' ist, d.h. wenn $\mathrm{top}M'$ einfach ist, anders gesagt $\mathrm{top}M' \cong S(j)$ für ein $j \in Q_0$. In so einem Fall existiert ein Element $u \in M_j$, das M' erzeugt. Die Umkehrung gilt auch: Für jedes $u \in M_j$ mit $u \neq 0$ ist $\langle u \rangle$ ein lokaler Untermodul von M mit $\langle u \rangle / \mathrm{rad} \langle u \rangle \cong S(j)$. Die Menge aller lokalen Untermoduln von M mit einem Kopf, der zu $S(j)$ isomorph ist, bezeichnen wir mit $\mathbf{Lok}(M \mid S(j))$. Es gilt also $\mathbf{Lok}(M \mid S(j)) = \{\langle u \rangle \mid u \in M_j,\ u \neq 0\}$ (hier ist zu bemerken, dass nicht jedes von Null verschiedene Element aus M einen lokalen Untermodul von M erzeugt). Jeder A-Modul M ist eine Summe seiner gewissen lokalen Untermoduln. Wenn $M = \sum_{i=1}^{n} L_i$, wobei alle L_i lokal sind und $L_k \not\subseteq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} L_i$ für alle $k \in [1, n]$ gilt, dann nennen wir den Ausdruck dieser Summe (bis auf Permutation der Summanden) einen *reduzierten Ausdruck* von M. Ist außerdem u_i ein erzeugendes Element von L_i für jedes $i \in [1, n]$, dann ist $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ein unverkürzbares Erzeugendensystem von M. Eine Summe $\sum_{i=1}^{n} L_i$ ist genau dann ein reduzierter Ausdruck von M, wenn $\mathrm{top}M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{top}L_i$. In diesem Fall gilt auch $\mathrm{rad}M = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rad}L_i$.
Wir werden in dieser Arbeit weitere Eigenschaften verwenden, die in folgenden speziellen Fällen leicht zu verifizieren sind:

- Sei $L \in \{L_1, \ldots, L_n\}$, dann ist L genau dann ein Summand jedes reduzierten Ausdrucks von M, wenn jeder Untermodul $U \in \mathbf{Lok}(M \mid \mathrm{top}L)$ ein Untermodul von L ist. Gilt diese Eigenschaft für jeden L_k mit $1 \leq k \leq n$, dann hat M genau einen reduzierten Ausdruck. Die lokalen Untermoduln $L_1, \ldots, L_n$ von M mit der oben genannten Eigenschaft sind in so einem Fall eindeutig bestimmt und die einfachen Moduln $\mathrm{top}L_1, \ldots, \mathrm{top}L_n$ sind paarweise nicht isomorph (die Umkehrung gilt allgemein nicht).

- Sind $\mathrm{top}L_1, \ldots, \mathrm{top}L_n$ paarweise nicht isomorph, dann hat M genau n maximale Untermoduln $M_1, \ldots, M_n$ mit $M_k = \mathrm{rad}L_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} L_i$ für alle $k \in [1, n]$.

- Sei M' ein Untermodul von M mit $\mathrm{top}(M/M') \cong S(i_1) \oplus \cdots \oplus S(i_m)$, dann gilt $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Wenn $m = n$, dann ist M' ein Untermodul von $\mathrm{rad}M$. Wenn $m \neq n$, dann gilt entweder $M' = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \notin \{i_1, \ldots, i_m\}}} L_i$ oder es existieren lokale Untermoduln $L'_1, \ldots, L'_r$ von M', so dass der Ausdruck $M' = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \notin \{i_1, \ldots, i_m\}}} L_i + \sum_{k=1}^{r} L'_k$ reduziert ist.

Projektive und injektive A-Moduln. Die "wichtigsten" lokalen A-Moduln sind die *projektiven* unzerlegbaren A-Moduln. Zu jedem $j \in Q_0$ gibt es (bis auf Isomorphie) genau einen projektiven unzerlegbaren A-Modul, der mit $P(j)$ bezeichnet wird. Der A-Modul $P(j)$ ist der von dem trivialen Weg e_j erzeugte Untermodul von A als A-Modul ($P(j) = A \cdot e_j = \langle e_j \rangle$). Eine maximale linear unabhängige Menge von Wegen aus A, die im Punkt j starten, bildet eine Basis von $P(j)$. Der zum Punkt $i \in Q_0$ korrespondierende K-Vektorraum $P(j)_i$ von $P(j)$ ist der von den Wegen von A, die in j starten und in i enden, aufgespannter K-Vektorraum und damit zu $e_i \cdot A \cdot e_j$ isomorph. Wie bereits erwähnt, erzeugen solche Wege die Untermoduln aus $\mathbf{Lok}(P(j) \mid S(i))$. Sie stehen somit in Verbindung mit den Relationen aus I: Wenn für $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \{\mathrm{w} \in KQ \mid \mathtt{s}(\mathrm{w}) = j,\ \mathtt{e}(\mathrm{w}) = i\}$, gilt $\langle w_1 \rangle = \langle w_2 \rangle$ in KQ/I, dann existiert ein $c \in K^*$ und eine Linearkombination $\widetilde{\mathrm{w}}$ von Wegen aus $\{\mathrm{w} \in KQ \mid \mathtt{s}(\mathrm{w}) = j,\ \mathtt{e}(\mathrm{w}) = i\}$ mit $w_1 = c \cdot w_2 + \widetilde{w}$ oder anders ausgedrückt $\mathrm{w}_1 - c \cdot \mathrm{w}_2 - \widetilde{\mathrm{w}} \in \mathrm{I}$, dabei gilt $\widetilde{w} \in \mathrm{rad} \langle w_1 \rangle$.

Jeder Weg w aus $\{w \in A \mid \mathtt{s}(w) = j,\ \mathtt{e}(w) = i\}$ beschreibt einen A-Homomorphismus f_w von $P(i)$ nach $P(j)$:

$$\begin{array}{rccc} f_w: & P(i) & \longrightarrow & P(j) \\ & a \cdot e_i & \mapsto & a \cdot w \cdot e_j, \end{array}$$

Insbesondere gilt $\mathrm{Im} f_w = \langle w \rangle \in \mathbf{Lok}(P(j) \mid S(i))$. Ist also $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis von $P(j)_i$, dann existieren für jedes $f \in \mathrm{Hom}_A(P(i), P(j))$ eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot f_{w_k}$.
Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Pfeile in Q_1, die in j starten, dann gilt $\mathrm{rad} P(j) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Im} f_{\alpha_k}$ und $\mathrm{top}\,(\mathrm{rad} P(j)) \cong \bigoplus_{k=1}^n S(\mathtt{e}(\alpha_k))$. Die Anzahl der Pfeile also, die in j starten und in i enden ist gleich der Anzahl der zu $S(i)$ isomorphen direkten Summanden von $\mathrm{top}\,(\mathrm{rad} P(j))$.
Außerdem gilt für jeden A-Modul M Folgendes: Sei $w \in M_j \setminus \{0\}$, dann gilt $\mathrm{rad}\,\langle w \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \alpha_k \cdot w \rangle$.
Jeder A-Modul ist ein Faktormodul einer direkten Summe von gewissen projektiven unzerlegbaren A-Moduln: Wenn $\mathrm{top} M \cong \bigoplus_{k=1}^n S(i_k)$, dann existiert eine Surjektion $\bigoplus_{k=1}^n P(i_k) \twoheadrightarrow M$ und $\bigoplus_{k=1}^n P(i_k)$ heißt *projektive Decke* von M. Insbesondere ist $P(j)$ eine projektive Decke eines jeden A-Moduls U mit $\mathrm{top} U \cong S(j)$ und damit ist jeder lokale A-Modul ein Faktormodul eines projektiven unzerlegbaren Moduls. Außerdem ist die K-Algebra A als A-Modul zu $\bigoplus_{j \in Q_0} P(j)$ isomorph.
Zu jedem $j \in Q_0$ existiert (bis auf Isomorphie) genau ein *injektiver* unzerlegbarer A-Modul, der mit $I(j)$ bezeichnet wird. Ein A-Modul M mit einem zu $\bigoplus_{k=1}^n S(i_k)$ isomorphen Sockel ist ein Untermodul von $I(M) := \bigoplus_{k=1}^n I(i_k)$. Der Modul $I(M)$ heißt *injektive Hülle* von M. Analog dazu ist jeder A-Modul mit einem einfachen Sockel ein Untermodul eines injektiven unzerlegbaren A-Moduls und jeder A-Modul ist ein Untermodul einer direkten Summe von gewissen injektiven unzerlegbaren A-Moduln.

Einen A-Modul M nennt man *treu*, wenn alle projektiven unzerlegbaren A-Moduln Untermoduln von einer direkten Summe von Kopien von M sind, d.h. wenn A als A-Modul zu einem Untermodul von $\underbrace{M \oplus \dots \oplus M}_{m-\mathrm{mal}}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ isomorph ist. Ein treuer A-Modul M ist *minimal*, wenn er ein direkter Summand jedes treuen A-Moduls ist. Hat eine K-Algebra A einen minimalen, projektiven, injektiven, treuen A-Modul, dann heißt sie *QF-3* Algebra (sie wurde von R.M.Thrall definiert).

Ein mit $S(j)$ bzw. $P(j)$ und $I(j)$ bezeichneter A-Modul ist mit seinen Eigenschaften bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Deshalb werden wir ihn bei unseren Betrachtungen als *der* zu j korrespondierende einfache bzw. projektive unzerlegbare und injektive unzerlegbare A-Modul bezeichnen.

Untermodul-Diagramm. Die Struktur eines A-Moduls M kann durch das zu der Halbordnung $(\mathbf{UM}(M), \subseteq)$ gehörige Hasse-Diagramm verdeutlicht werden. Die Visualisierung verläuft in folgender Weise: Jeder Untermodul U von M wird durch einen Punkt repräsentiert, der auf der Ebene $\dim_K U$ der Moduln-Längen-Skala liegt. Zwei Punkte, die U und U' repräsentieren werden genau dann mit einer Linie verbunden, wenn U' ein maximaler Untermodul von U ist oder wenn U ein maximaler Untermodul von U' ist. Angenommen $U' \subset U$, dann symbolisiert diese Linie die Inklusion $U' \hookrightarrow U$. In diesem Fall gilt $\dim_K U = \dim_K U' + 1$ und die den Modul U bzw. U' repräsentierenden Punkte befinden sich auf der $(\dim_K U)$-ten bzw. $(\dim_K U')$-ten Ebene auf der Modul-Längen-Skala, d.h. die abwärts gehenden Lini-

en aus einem Punkt verbinden den Punkt von U mit den Punkten, die seine maximalen Untermoduln repräsentieren. Die Struktur des Diagramms erhält insbesondere durch die Verwendung der Farben eine gewisse Transparenz. Jedem Punkt des Köchers ordnen wir jeweils eine Farbe zu. Wenn $U/U' \cong S(j)$, dann hat die Linie von $U' \hookrightarrow U$ die Farbe des Punktes j. Auf diese Weise verdeutlichen wir die einfachen Kompositionsfaktoren jeder Jordan-Hölder-Reihe, die in dem Untermodul-Diagramm zu finden ist. Sind gewisse Untermoduln von M durch die Elemente des Körpers K parametrisiert, dann verwenden wir symbolische Abkürzungen. Ist $\sum_{i=1}^{k} L_i$ ein reduzierter Ausdruck von $U \in \mathbf{UM}(M)$, dann bezeichnen wir den U repräsentierenden Punkt mit $\sum_{i=1}^{k} \langle u_i \rangle$, wobei u_i ein erzeugendes Element von L_i ist. Nach den Erläuterungen oben ist der Punkt von U genau dann mit k Punkten aus der $(\dim_K U - 1)$-ten Ebene verbunden, wenn $\mathrm{top}(L_i) \ncong \mathrm{top}(L_j)$ für $i \neq j$. Ist dies nicht der Fall, dann gibt es unendlich viele Untermoduln von U und damit unendlich viele abwärts gehende Linien.
Der Untermodulverband $(\mathbf{UM}(M), \subseteq)$ heißt *distributiv*, wenn kein Subfaktor von M existiert, der die Form $S(j) \oplus S(j)$ für ein $j \in Q_0$ hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Anzahl der Untermoduln von M endlich ist. Das impliziert, dass es nur endlich viele lokale Untermoduln gibt und damit ist auch $|\mathbf{Lok}(M \mid S(j))| < \infty$, für jedes $j \in Q_0$. Wir betrachten diesen Fall etwas genauer: Angenommen $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\} = \mathbf{Lok}(M \mid S(j))$ (es gilt in diesem Fall $\dim_K(M_j) = k$), dann existiert eine Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(k)$, so dass $U_{\sigma(1)} \subset U_{\sigma(2)} \subset \cdots \subset U_{\sigma(k)}$ gilt, d.h. $(\mathbf{Lok}(M \mid S(j)), \subseteq)$ ist total geordnet. (Nehmen wir an, dies ist nicht der Fall, z.B. $U_1 \nsubseteq U_2$ und $U_2 \nsubseteq U_1$. Wenn $U_1 = \langle u_1 \rangle$ und $U_2 = \langle u_2 \rangle$ für gewisse $u_1, u_2 \in M_j$, dann bezeichnen wir mit U_c den Modul $\langle u_1 + c \cdot u_2 \rangle$ für jedes $c \in K$. Es gilt $U_c \in \mathbf{Lok}(U_1 + U_2 \mid S(j))$ für alle $c \in K$ und für $c, c' \in K$ mit $c \neq c'$ gilt $U_c \neq U_{c'}$. Da K unendlich viele Elemente hat, haben auch $U_1 + U_2$ unendlich viele Untermoduln.)
Für die Moduln mit distributiven Verbänden gelten auch gewisse duale Eigenschaften: Hat der Modul M endlich viele Untermoduln, dann hat er offensichtlich auch endlich viele Faktormoduln. Entsprechend gibt es also endlich viele Faktormoduln $\left\{W_1^{(i)}, W_2^{(i)}, \ldots, W_{k_i}^{(i)}\right\}$ von M, deren Sockel zu $S(i)$ für jedes $i \in Q_0$ isomorph sind. Analog dazu existiert eine Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(k_i)$ mit $W_{\sigma(1)}^{(i)} \twoheadrightarrow W_{\sigma(2)}^{(i)} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow W_{\sigma(k_i)}^{(i)}$.
Aus den letzten Erläuterungen erhalten wir die folgende Kette von äquivalenten Aussagen:

M hat einen distributiven Untermodulverband.

$$\Updownarrow$$

M hat endlich viele Untermoduln bzw. Faktormoduln.

$$\Updownarrow$$

Jeder Untermodul von M hat genau einen reduzierten Ausdruck.

$$\Updownarrow$$

Für jedes $i \in Q_0$ mit $M_i \neq 0$ existiert eine Basis $\left\{m_1^{(i)}, \ldots, m_{n_i}^{(i)}\right\}$ von M_i mit
$$\left\langle m_1^{(i)} \right\rangle \subset \left\langle m_2^{(i)} \right\rangle \subset \cdots \subset \left\langle m_{n_i}^{(i)} \right\rangle.$$

$$\Updownarrow$$

Für jedes $i \in Q_0$ mit $\dim_K(M_i) = n_i$ hat M genau n_i Untermoduln bzw. Faktormoduln mit den zu $S(i)$ isomorphen Köpfen bzw. Sockeln.

Distributive Untermodulverbände haben auch sogenannte *dünne* Moduln, d.h. Moduln, für die jede Koordinate des Dimensionsvektors aus $\{0, 1\}$ ist. Wenn $\dim_K(M_i) = 1$, dann existiert ein eindeutig bestimmter Untermodul L bzw. Faktormodul W von M mit $\mathrm{top}L \cong S(i)$

bzw. soc$W \cong S(i)$.
Ist $\mathbf{U}$ eine Teilmenge von $\mathbf{UM}(M)$, so dass für alle $M', M'' \in \mathbf{U}$ gilt $M' + M'' \in \mathbf{U}$ und $M' \cap M'' \in \mathbf{U}$, dann ist $(\mathbf{U}, \subseteq)$ ein *Unterverband* von $(\mathbf{UM}(M), \subseteq)$ und kann auch durch ein Diagramm visualisiert werden (das Prinzip ist oben beschrieben).
Jede Kette in so einem Diagramm repräsentiert eine Filtrierung von M, dessen Faktoren nicht unbedingt einfach sein müssen.
Beim gleichzeitigen Betrachten von Moduln mehrerer K-Algebren verwenden wir Fußindizies mit den Namen der jeweiligen Algebren, um Verwechslungen auszuschließen.

Entgegengesetzte Algebra A^{op}. Für eine K-Algebra A definiert man die *entgegengesetzte* Algebra A^{op} wie folgt: Auf dem K-Vektorraum A ist die Multiplikation $*$ durch $a * a' = a' \cdot a$ für $a, a' \in A$ gegeben. Ist also eine K-Algebra A durch (Q, I) dargestellt, dann gilt für das die K-Algebra A^{op} beschreibende Paar $(Q^{op}, \mathrm{I}^{op})$: $Q_0^{op} = Q_0$, $Q_1^{op} = \left\{ \mathtt{e}(\alpha) \overset{\alpha^{op}}{\to} \mathtt{s}(\alpha) \mid \alpha \in Q_1 \right\}$ und $\mathrm{I}^{op} = \{\rho^{op} \mid \rho \in I\}$, dabei ist ρ^{op} für ein $\rho = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \mathrm{w}_k$ mit $\mathrm{w}_k = \left(i|\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_{m_k}^{(k)}|j \right)$ wie folgt definiert: $\rho^{op} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \mathrm{w}^{op}$ mit $\mathrm{w}^{op} = \left(j| \left(\alpha_{m_k}^{(k)}\right)^{op}, \left(\alpha_{m_k-1}^{(k)}\right)^{op} \ldots, \left(\alpha_1^{(k)}\right)^{op} |j \right)$.
Wenn für $(i \overset{\alpha}{\to} j) \in Q_1$ der Pfeil α der einzige von i nach j ist, dann kann jeder Weg $\mathrm{w} = (i|\alpha_1, \ldots, \alpha_m|j)$ als eine Sequenz $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ bezeichnet werden, wobei $\mathtt{s}(\alpha_k) = i_k$ für alle $k \in [1, m-1]$ und $\mathtt{e}(\alpha_m) = i_m$. In diesem Fall $\mathrm{w}^{op} = (i_m, \ldots, i_2, i_1)$ und für jede Relation $\rho = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \left(i_1^{(k)}, i_2^{(k)}, \ldots, i_{m_k}^{(k)} \right)$ aus I ist $\rho^{op} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \left(i_{m_k}^{(k)}, \ldots, i_2^{(k)}, i_1^{(k)} \right)$ die zu ρ korrespondierende Relation aus I^{op}.

Ist M ein A-Modul, so ist $D(M) := \mathrm{Hom}_K(M, K)$ mit der Operation

$$\begin{array}{ccc} D(M) \times A & \longrightarrow & D(M) \\ (\gamma, a) & \mapsto & \begin{array}{ccc} M & \overset{(\gamma \cdot a)}{\to} & K \\ u & \mapsto & \gamma(a \cdot u) \end{array} \end{array}$$

ein A-Rechtsmodul und nach der Definition von A^{op} ein A^{op}-Linksmodul. Für $M, M' \in$ mod-A und einen A-Homomorphismus $f : M \longrightarrow M'$ ist $D(f) : D(M') \longrightarrow D(M)$ mit $D(f)(\gamma') = \gamma' \circ f$ für $\gamma' \in D(M')$ ein A^{op}-Homomorphismus.
Der kontravariante Funktor D : mod-$A \longrightarrow$ mod-A^{op} mit $D = \mathrm{Hom}_K(-, K)$ heißt *Standard-Dualität*. Er liefert eine (links-rechts) Symmetrie zwischen den beiden Kategorien, die im folgenden Sinne zu verstehen ist: Für alle $j \in Q_0$ gilt

- $D(S(j))$ ist der zu j korrespondierende einfache A^{op}-Modul.
- $D(P(j))$ ist der zu j korrespondierende injektive unzerlegbare A^{op}-Modul.
- $D(I(j))$ ist der zu j korrespondierende projektive unzerlegbare A^{op}-Modul.
- $D(P(i) \hookrightarrow P(j))$ ist in A^{op} eine Surjektion $I_{A^{op}}(j) \twoheadrightarrow I_{A^{op}}(i)$ und $D(\mathrm{Im}(P(i) \hookrightarrow P(j)))$ ist $\mathrm{Ker}\,(I_{A^{op}}(j) \twoheadrightarrow I_{A^{op}}(i))$.
- Ist M ein treuer A-Modul, dann ist $D(M)$ ein treuer A^{op}-Modul. Außerdem ist A genau dann eine QF-3 Algebra, wenn es auch A^{op} ist [Mo].

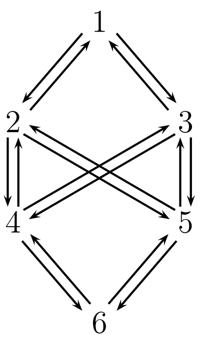
Es gibt weitere Eigenschaften der Standard-Dualität, die später angegeben werden (sie stehen in Verbindung mit Standard- und Kostandardmoduln einer quasi-erblichen K-Algebra).

Isomorphe Algebren. Zwei K-Algebren A und A' sind isomorph, wenn eine K-lineare, bijektive Abbildung $\gamma : A \longrightarrow A'$ existiert, die ein Ringhomomorphismus ist. Es erleichtert die Betrachtung von A, wenn man eine zu A isomorphe Algebra A' findet, die möglichst "einfache" Relationen hat (z.B. die Koeffizienten der Relationen sind möglichst ± 1 oder sie haben weniger Summanden). Wir beschreiben nun einen Isomorphismus von K-Algebren, der die Umformung von Relationen deutlich macht.
Seien (Q, I) ein Köcher mit Relationen und w ein Weg in KQ. Für $i, j \in Q_0$ mit $(i \to j) \in Q_1$ und $c \in K^*$ bezeichnen wir mit $\mathrm{w}(c, i \to j)$ den Weg $c^t \cdot \mathrm{w}$, wenn der Pfeil $(i \to j)$ genau t-Mal ($t \in \mathbb{N}_0$) in dem Weg w vorkommt, d.h. für

$$\mathrm{w} = (i' \to \cdots \to \underbrace{i \to j}_{1} \to \cdots \to \underbrace{i \to j}_{2} \to \cdots \to \cdots \to \underbrace{i \to j}_{t} \to \cdots \to i'')$$

gilt $\mathrm{w}(c, i \to j) = c^t \cdot \mathrm{w}$. Ist $\rho = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \mathrm{w}_k$ eine Relation aus I, dann ist $\rho(c, i \to j) := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \mathrm{w}_k(c, i \to j)$ und $\mathrm{I}(c, i \to j) := \{\rho(c, i \to j) \mid \rho \in \mathrm{I}\}$. Die lineare Abbildung $\gamma : KQ/\mathrm{I} \longrightarrow KQ/\mathrm{I}(c, i \to j)$ mit $\gamma(\mathrm{w} + \mathrm{I}) = \mathrm{w}(c, i \to j) + \mathrm{I}(c, i \to j)$ für alle $\mathrm{w} \in KQ$ ist offensichtlich ein Isomorphismus von K-Algebren. Iterativ erhalten wir, dass für $\xi_1, \ldots \xi_n \in K^* \times Q_1$ mit $\xi_k = (c_k, i_k \to j_k)$ und $\mathrm{I}(k) := \{\rho(c_k, i_k \to j_k) \mid \rho \in \mathrm{I}(k-1)\}$ (hier $\mathrm{I}(0) = \mathrm{I}$), die Algebren KQ/I und $KQ/\mathrm{I}(k)$ isomorph für alle k mit $0 \leq k \leq n$ sind. Ist σ eine Permutation aus der Gruppe $\mathrm{Sym}(n)$ und $\mathrm{I}(\sigma(k)) = \big\{\rho(c_{\sigma(k)}, i_{\sigma(k)} \to j_{\sigma(k)}) \mid \rho \in \mathrm{I}(\sigma(k-1))\big\}$, dann gilt offensichtlich $\mathrm{I}(n) = \mathrm{I}(\sigma(n))$, d.h. $\mathrm{I}(n)$ hängt nicht von der Reihenfolge der "Umformungen" von Relationen ab.

Beispiel 1.1. Seien $A = \mathbb{C}Q/\mathrm{I}$ und $A' = \mathbb{C}Q/\mathrm{I}'$, wobei der Köcher Q und die Mengen der Relationen, die I bzw. I$'$ erzeugen, im folgenden Bild repräsentiert sind (zur besseren Unterscheidung der Pfeile und Koeffizienten, sind die Elemente aus $\mathbb{C}$ fett markiert). Für $\xi_1 = \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, 1 \to 2\right)$, $\xi_2 = \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, 1 \to 3\right)$, $\xi_3 = (-\mathbf{2}, 2 \to 5)$, $\xi_4 = \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, 3 \to 1\right)$, $\xi_5 = \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, 4 \to 2\right)$, $\xi_6 = \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}, 4 \to 6\right)$, $\xi_7 = \left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}, 5 \to 6\right)$ aus $K^* \times Q_1$ gilt $\mathrm{I}(7) = \mathrm{I}'$ und damit sind die $\mathbb{C}$-Algebren A und A' isomorph.



$$I = \left\{ \begin{array}{rcl rcl}
121 & = & 0 & 131 & = & 0 \\
-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot 125 & = & 135 & 134 & = & 124 \\
-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot 521 & = & 531 & 431 & = & 421 \\
\mathbf{2} \cdot 246 & = & 256 & -346 & = & 356 \\
-\mathbf{2} \cdot 642 & = & 652 & 643 & = & 653 \\
\\
-\mathbf{4} \cdot 212 & = & 252 & -\mathbf{4} \cdot 313 & = & 343 \\
242 & = & 0 & 353 & = & 0 \\
-\mathbf{2} \cdot 213 & = & 243 & \mathbf{4} \cdot 312 & = & 352 \\
\mathbf{4} \cdot 213 & = & 253 & -\mathbf{2} \cdot 312 & = & 342 \\
-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \cdot 535 & = & 565 & -\mathbf{3} \cdot 424 & = & 464 \\
-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \cdot 564 & = & 534 + 524 & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \cdot 465 & = & 425 + 435
\end{array} \right\}
\qquad
I' = \left\{ \begin{array}{lcl lcl}
121 & = & 0 & 131 & = & 0 \\
125 & = & 135 & 134 & = & 124 \\
521 & = & 531 & 431 & = & 421 \\
246 & = & 256 & 346 & = & 356 \\
642 & = & 652 & 643 & = & 653 \\
\\
212 & = & -252 & 313 & = & -343 \\
242 & = & 0 & 353 & = & 0 \\
213 & = & 243 & 312 & = & 352 \\
213 & = & 253 & 312 & = & 342 \\
535 & = & 565 & 424 & = & 464 \\
564 & = & 534 + 524 & 465 & = & 425 + 435
\end{array} \right\}$$

Die Kategorie mod-A ist zu einem regulären Block der sogenannten Kategorie $\mathcal{O}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ äquivalent. Die Algebra A ist in [S] beschrieben, sie wurde auch in [M2], [V] betrachtet. Die Frage, ob die von ± 1 verschiedenen Koeffizienten sich in den Relationen "beseitigen" lassen, wurde dort mit unterschiedlichen Beweisen positiv beantwortet.

Bemerkung 1.2. In dieser Arbeit betrachten wir gebundene Algebren A, deren Köcher Q durch eine Halbordnung $\leqslant$ auf Q_0 eindeutig bestimmt ist, genauer: Die Punkte i und j aus Q_0 sind genau dann verbunden wenn $i < j$ und kein $k \in Q_0$ mit $i < k < j$ existiert. Ist das der Fall, dann sind sie mit zwei Pfeilen in entgegengesetzten Richtungen verbunden. Wir werden zeigen, dass für zwei Wege $\mathrm{w}_1 = (i \to i_1 \to \cdots \to i_k \to j)$ und $\mathrm{w}_2 = (i \to j_1 \cdots \to j_m \to j)$ mit $i < i_1 < \cdots < i_k < j$ und $i < j_1 < \cdots < j_m < j$ gilt $\langle w_1 \rangle = \langle w_2 \rangle \neq 0$. In solch einer Situation gilt also $\mathrm{w}_1 = c \cdot \mathrm{w}_2 + \widetilde{\mathrm{w}}$, wobei $c \in K^*$ und $\widetilde{\mathrm{w}}$ eine Linearkombination aus den Wegen ist, die in i starten und in j enden, zudem gilt $\widetilde{w} \in \operatorname{rad} \langle w_1 \rangle$. Es ist zu vermuten, dass ein Isomorphismus $\Phi : KQ/\mathrm{I} \longrightarrow KQ/\mathrm{I}'$ existiert, wobei die Relation $\mathrm{w}_1 - c \cdot \mathrm{w}_2 - \widetilde{\mathrm{w}}$ in I der Relation $\mathrm{w}_1 - \mathrm{w}_2$ in I' entspricht. So eine Umformung ermöglicht eine einfachere Betrachtungsweise. Dies gilt nicht, wenn $\mathrm{w}_1 \in \mathrm{I}$, d.h. $w_1 = 0$ in A. Ein Beispiel dafür wurde bereits in [Bo] gegeben. In dieser Arbeit gilt aber $w \neq 0$ für alle Wege $\mathrm{w} \in KQ$ mit der Eigenschaft oben. Deshalb bleibt diese Vermutung zumindest unwiderlegt. Wir werden sie in dieser Arbeit nicht berücksichtigen.

1.1.2 Quasi-erbliche Algebra

Im Zusammenhang mit quasi-erblichen Algebren übernehmen wir in diesem Abschnitt Definitionen und Eigenschaften, die für diese Arbeit wichtig sind. Die Referenzen dazu sind in [CPS] [KK],[R2], [DR] zu finden. Die hier zitierten Definitionen weichen in Bezug auf die Halbordnung von den Definitionen in der Literatur ab (es wird darauf verwiesen). Das gesamte Konzept wird dadurch aber nicht verändert.

In diesem Unterabschnitt sei A eine endlich dimensionale Basis-Algebra, d.h. $A \cong KQ/\mathrm{I}$. Auf den Punkten des Köchers Q sei eine Halbordnungsrelation $\leqslant$ definiert.

Wir fixieren nun einen Punkt j aus Q_0. Mit $S(j)$, $P(j)$, $I(j)$ bezeichnen wir weiterhin den zu j korrespondierenden einfachen, projektiven unzerlegbaren und injektiven unzerlegbaren A-Modul.

Standard- und Kostandardmoduln. Mit $\Delta(j)$ bzw. $\nabla(j)$ bezeichnen wir den *Standard-*, bzw. *Kostandardmodul* bezüglich j, der wie folgt definiert ist:

$$\Delta(j) = P(j) / \left(\sum_{i<j} \sum_{f \in \mathrm{Hom}_A(P(i),P(j))} \mathrm{Im} f \right) \quad \text{bzw.} \quad \nabla(j) = \bigcap_{i<j} \bigcap_{f \in \mathrm{Hom}_A(I(j),I(i))} \mathrm{Ker} f.$$

In der Literatur wird meistens $j < i$ statt $i < j$ verwendet (die Relation $i < j$ stammt aus der Betrachtung von quasi-erblichen Algebren in der Darstellungstheorie von halbeinfachen Lie-Algebren).
Der A-Modul $\Delta(j)$ bzw. $\nabla(j)$ ist der maximale Faktormodul von $P(j)$ bzw. der maximale Untermodul von $I(j)$, dessen einfache Kompositionsfaktoren zu gewissen A-Moduln aus $\{S(k) \mid j \leqslant k\}$ isomorph sind.
Aus der Definition der Standard- und Kostandardmoduln lassen sich einige offensichtliche Eigenschaften verifizieren: Ist $j \in Q_0$ bezüglich der gegebenen Halbordnung $\leqslant$ minimal, d.h. $j \in \min\{(Q_0, \leqslant)\}$, dann gilt $\Delta(j) = P(j)$ und $\nabla(j) = I(j)$. Wenn $j \in \max\{(Q_0, \leqslant)\}$, dann $\Delta(j) = \nabla(j) = S(j)$.

Besitzt ein A-Modul M eine Filtrierung $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k \subset \cdots \subset M_{r-1} \subset M_r = M$, so dass die Kompositionsfaktoren aus $\{\Delta(j) \mid j \in Q_0\}$, bzw. aus $\{\nabla(j) \mid j \in Q_0\}$ sind, dann nennen wir einen solchen Modul Δ-*gut*, bzw. ∇-*gut* und eine solche Filtrierung nennen wir Δ-*Filtrierung*, bzw. ∇-*Filtrierung* von M. Der Untermodul M_1 ist der Beginn dieser Filtrierung und mit dem Faktormodul M_r/M_{r-1} endet diese Filtrierung. Mit $(M : \Delta(j))$ bzw. $(M : \nabla(j))$ bezeichnen wir in dieser Arbeit die Anzahl der zu $\Delta(j)$ bzw. $\nabla(j)$ isomorphen Kompositionsfaktoren in einer Δ-Filtrierung, bzw. ∇-Filtrierung von M. Diese Multiplizitäten, hängen nicht von der Wahl der Δ- bzw. ∇-Filtrierung ab. Gilt $M_k/M_{k-1} \cong \Delta(i_k)$ für jedes $i \in [1, r]$, dann folgt aus den im letzten Unterabschnitt erwähnten Modul-Eigenschaften: $\dim_K M = \sum_{k=1}^{r} \dim_K \Delta(i_k)$, $[M : S(j)] = \sum_{k=1}^{r} [\Delta(i_k) : S(j)]$, $\mathrm{top}M$ ist ein Summand von $\bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{top}\Delta(i_k)$ und $\mathrm{soc}M$ ist ein Summand von $\bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{soc}\Delta(i_k)$. Analoge Eigenschaften gelten für M im Fall $M_k/M_{k-1} \cong \nabla(i_k)$ für jedes $i \in [1, r]$.

Mit $\mathfrak{F}(\Delta)$ bzw. $\mathfrak{F}(\nabla)$ werden die vollen Unterkategorien von mod-A bezeichnet, die alle Δ-guten, bzw. ∇-guten A-Moduln enthalten.

> Eine K-Algebra A mit der auf Q_0 gegebenen Halbordnung $(A, \leqslant)$ heißt *quasi-erblich*, wenn $\mathrm{End}_A(\Delta(j)) \cong K$ und $P(j) \in \mathfrak{F}(\Delta)$ für jedes $j \in Q_0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{End}_A(\nabla(j)) \cong K$ und $I(j) \in \mathfrak{F}(\nabla)$ für jedes j aus Q_0.

Charakteristischer Kippmodul. Die volle Unterkategorie $\mathfrak{F}(\Delta) \cap \mathfrak{F}(\nabla)$ von mod-A, deren Objekte sowohl Δ-gut als auch ∇-gut sind, ist von einem (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) A-Modul T vollständig beschrieben. Es gilt nämlich $\mathfrak{F}(\Delta) \cap \mathfrak{F}(\nabla) = \mathrm{add}T$, d.h. jeder A-Modul aus $\mathfrak{F}(\Delta) \cap \mathfrak{F}(\nabla)$ ist eine direkte Summe von direkten Summanden von T. Dieser A-Modul heißt *charakteristischer Kippmodul* von $(A, \leqslant)$ und ist in [R2] definiert und betrachtet worden. Der charakteristische Kippmodul T zerfällt in eine direkte Summe von $|Q_0|$ unzerlegbaren A-Moduln $T(j)$ mit $j \in Q_0$,

$$T = \bigoplus_{j \in Q_0} T(j)$$

und damit existieren für jeden $M \in \mathfrak{F}(\Delta) \cap \mathfrak{F}(\nabla)$ eindeutig bestimmte $m_i \in \mathbb{N}_0$ für jedes $i \in Q_0$ mit $M = \bigoplus_{i \in Q_0} T(i)^{m_i}$, hier $T(i)^{m_i} = \underbrace{T(i) \oplus T(i) \oplus \cdots \oplus T(i)}_{m_i}$. Der unzerlegbare A-Modul $T(j)$ aus $\mathfrak{F}(\Delta) \cap \mathfrak{F}(\nabla)$ ist durch folgende Eigenschaften eindeutig bestimmt: Für jeden Faktor $\Delta(i)$ in einer Δ-Filtrierung von $T(j)$ gilt $j \leqslant i$ und $\Delta(j)$ kommt in jeder Δ-Filtrierung von $T(j)$ genau ein mal vor, d.h. $(T(j) : \Delta(j)) = 1$. Jeder Faktor $\nabla(i)$ in einer ∇-Filtrierung von $T(j)$ ist aus $\{\nabla(i) \mid j \leqslant i\}$ und analog dazu gilt $(T(j) : \nabla(j)) = 1$. Es existieren zwei exakte Folgen

$$0 \to \Delta(j) \to T(j) \to X(j) \to 0 \quad \text{und} \quad 0 \to Y(j) \to T(j) \to \nabla(j) \to 0,$$

mit $X(i) \in \mathfrak{F}(\Delta)$ und $Y(j) \in \mathfrak{F}(\nabla)$, d.h. es gibt eine Δ-Filtrierung von $T(j)$, die mit $\Delta(j)$ beginnt und es gibt eine ∇-Filtrierung von $T(j)$, die mit $\nabla(j)$ endet (in diesem Fall gilt $(X(j) : \Delta(j)) = 0$ und $(Y(j) : \nabla(j)) = 0$).
Bemerkenswert für den Modul $T(j)$ ist auch, dass $T(j)$ unter $\{T(i) \mid i \in Q_0\}$ eindeutig bestimmt ist mit den Eigenschaften $[T(j) : S(j)] = 1$ und $[T(j) : S(i)] = 0$ für alle $i \in Q_0$ mit $j \nleqslant i$.

Ringel-Dual. Für den charakteristischen Kippmodul T wird die Algebra $\mathrm{R}(A) := \mathrm{End}_A(T)$ *Ringel-Dual* von A genannt. Die Algebra $\mathrm{R}(A)$ ist wiederum eine quasi-erbliche Algebra: Ist A eine quasi-erbliche Algebra bezüglich der Halbordnung $(Q_0, \leqslant)$, dann gilt $\mathrm{R}(Q)_0 = Q_0$ für den Köcher $\mathrm{R}(Q)$ von $\mathrm{R}(A)$ und $\mathrm{R}(A)$ ist quasi-erblich bezüglich der Halbordnung $(\mathrm{R}(Q)_0, \geqslant)$. Der Funktor $\mathrm{Hom}_A(T, -) : \text{mod-}A \longrightarrow \text{mod-}\mathrm{End}_A(T)$ liefert folgenden Zusammenhang zwischen den Kategorien mod-A und mod-$\mathrm{R}(A)$: Für alle $j \in Q_0$ gilt

$$\mathrm{Hom}_A(T, T(j)) \cong P_{\mathrm{R}(A)}(j), \quad \mathrm{Hom}_A(T, I(j)) \cong T_{R(A)}(j), \quad \mathrm{Hom}_A(T, \nabla(j)) \cong \Delta_{\mathrm{R}(A)}(j)$$

Die Beweise und weitere Erläuterungen und Ergänzungen sind im [R2], [KK], [DX] zu finden.

Korrespondenz mit A^{op}**.** Ist $(A, \leqslant)$ eine quasi-erbliche Algebra, dann ist es auch die Algebra $(A^{op}, \leqslant)$. Hier ist zu beachten, dass die Halbordnung $\leqslant$ auf den Punkten des Köchers $Q_0^{op} = Q_0$ unverändert bleibt. Somit ist $(A, \leqslant)$ genau dann eine 1-quasi-erbliche Algebra, wenn $(A^{op}, \leqslant)$ quasi-erblich ist. Mit der Standard-Dualität erhalten wir eine Äquivalenz zwischen den Standard- und Kostandardmoduln von A und A^{op}: Für alle $j \in Q_0$ gilt

$$D(\Delta(j)) \cong \nabla_{A^{op}}(j), \quad D(\nabla(j)) \cong \Delta_{A^{op}}(j)$$

Die Eigenschaften der Standard-Dualität liefern eine Korrespondenz zwischen den Δ- bzw. ∇-Filtrierungen von $P_A(j)$ bzw. $I_A(j)$ und ∇- bzw. Δ-Filtrierungen von $I_{A^{op}}$ bzw. $P_{A^{op}}(j)$.

Die einfachen Kompositionsfaktoren von $\Delta(j)$ und $\nabla(j)$ stehen in folgender Korrespondenz mit den Multiplizitäten der Δ- bzw. ∇-Filtrierungen von projektiven bzw. injektiven unzerlegbaren A-Moduln

$$\big(I(j) : \nabla(i)\big) = \big[\Delta(i) : S(j)\big] \quad \text{und} \quad \big(P(j) : \Delta(i)\big) = \big[\nabla(i) : S(j)\big]$$

Diese Formeln werden Brauer-Humphreys Reziprozitätsformeln genannt.

1.2 1-quasi-erbliche Algebra

In diesem Abschnitt wird eine Unterklasse von quasi-erblichen K-Algebren definiert. Diese Algebren werden 1-quasi-erblich genannt, um eine ihrer spezifischen Eigenschaften zu betonen, die die Anzahl der isomorphen Standardmoduln in einer Δ-Filtrierung von projektiven Moduln "reguliert". Ferner betrachten wir einige Beispiele und Gegenbeispiele, um die Axiome zu diesen Algebren besser nachzuvollziehen. Diese Beispiele werden später verschiedene Aussagen zu 1-quasi-erblichen Algebren verdeutlichen.
Die Notationen aus dem letzten Abschnitt, die für die Beschreibung von quasi-erblichen Algebren verwendet werden, behalten auch weiterhin ihre Relevanz.

1.2.1 Definition

In der Betrachtung von quasi-erblichen K-Algebren wird die Halbordnung, die auf der Menge der Isomorphieklassen der einfachen Moduln gegeben ist, oft durch eine totale Ordnung ersetzt, bei der die Standard- und Kostandardmoduln unverändert bleiben. Für die Struktur der Algebren in der nachfolgenden Definition spielt die vorgegebene Halbordnung eine ausschlaggebende Rolle. Deshalb wird die äquivalente totale Ordnung hier nicht eingesetzt.

Sei nun A eine endlich dimensionale basische K-Algebra und (Q, I) der die Algebra A darstellende Köcher Q mit Relationen I. Die Punkte von Q_0 bezeichnen wir mit natürlichen Zahlen ($Q_0 = \{1, \ldots, n\}$, wobei $n = |Q_0|$) und mit $\leqslant$ eine Halbordnungsrelation auf Q_0. Das Paar $(A, \leqslant)$, das im letzten Abschnitt beschrieben wurde, sei eine quasi-erbliche K-Algebra.

Definition 2.1. Eine quasi-erbliche Algebra $(A, \leqslant)$ mit $A = KQ/\mathrm{I}$ nennen wir *1-quasi-erblich*, wenn für alle $i, j \in Q_0$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- $1 \leqslant j \leqslant n$ für alle $j \in Q_0$, d.h. es gibt genau ein minimales ($\{1\} = \min\{(Q_0, \leqslant)\}$) und genau ein maximales ($\{n\} = \max\{(Q_0, \leqslant)\}$) Element in Q_0 bezüglich $\leqslant$,
- $\big[\Delta(i) : S(j)\big] = \big(P(j) : \Delta(i)\big) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \leqslant j, \\ 0 & \text{sonst }, \end{cases}$
- $\mathrm{soc} P(j) \cong S(n)$,
- $\Delta(j) \hookrightarrow \Delta(1), \quad \nabla(1) \twoheadrightarrow \nabla(j)$.

Wir betrachten nun die dualen Axiome dieser Definition. Wie bereits erwähnt, ist für eine quasi-erbliche K-Algebra $(\mathcal{A}, \leqslant)$ auch $(\mathcal{A}^{op}, \leqslant)$ quasi-erblich. Die Brauer-Humphreys Reziprozitätsformeln zeigen den Zusammenhang zwischen den Multiplizitäten der einfachen Moduln in Jordan-Hölder-Filtrierungen von Standard- bzw. Kostandardmoduln und den Multiplizitäten der Standard- bzw. Kostandardmoduln in Δ- bzw. ∇-Filtrierungen von projektiven bzw. injektiven unzerlegbaren Moduln einer quasi-erblichen Algebra. Somit gilt für injektive unzerlegbare Moduln und Kostandardmoduln einer 1-quasi-erblichen Algebra A:

$$\big[\nabla(i) : S(j)\big] = \big(I(j) : \nabla(i)\big) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \leqslant j, \\ 0 & \text{sonst }. \end{cases}$$

Demzufolge gilt $\big[\Delta(i) : S(j)\big] = \big[\nabla(i) : S(j)\big]$ und $\big(P(j) : \Delta(i)\big) = \big(I(j) : \nabla(i)\big)$ für alle $i, j \in Q_0$. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit nennen wir diese Gleichungen *Multiplizitäten-Eigenschaft*.
Offensichtlich gilt $\dim_K \Delta(i) = \dim_K \nabla(i)$ für alle $i \in Q_0$ und aufgrund der Eigenschaften des Dimensionsvektors erhalten wir für alle $j \in Q_0$

$$\dim_K P(j) = \sum_{\substack{i \in Q_0 \\ i \leqslant j}} \dim_K \Delta(i) = \sum_{\substack{i \in Q_0 \\ i \leqslant j}} \dim_K \nabla(i) = \dim_K I(j).$$

Aus der Eigenschaft $\mathrm{soc} P(j) \cong S(n)$ folgt, dass $I(n)$ eine injektive Hülle jedes projektiven unzerlegbaren A-Moduls und damit von $P(n)$ ist. Aus $P(n) \hookrightarrow I(n)$ und $\dim_K P(n) = \dim_K I(n)$ erhalten wir $P(n) \cong I(n)$. Somit ist $P(n)$ eine injektive Hülle von $P(j)$ und damit sind alle projektiven unzerlegbaren A-Moduln Untermoduln von $P(n)$. Der Modul $P(n)$ ist unzerlegbar und damit ein minimaler, projektiver, injektiver, treuer A-Modul. Aus der Definition von Thrall folgt:

Lemma 2.2. *Jede 1-quasi-erbliche Algebra $(A = KQ/I, \leqslant)$ ist eine QF-3 Algebra und $P(n)$ mit $n = \max\{(Q_0, \leqslant)\}$ ist ein minimaler projektiver injektiver treuer A-Modul.*

Bemerkung 2.3. Eine quasi-erbliche K-Algebra $\mathcal{A}$, die nur die ersten drei Axiome einer 1-quasi-erblichen Algebra erfüllt, ist offensichtlich auch eine QF-3 Algebra. Bemerkenswert ist außerdem auch, dass für eine K-Algebra, die die ersten zwei Axiome einer 1-quasi-erblichen Algebra und $\mathrm{soc}P(n) \cong S(n)$ erfüllt, kein Beispiel gefunden werden könnte, das die restlichen Axiome der Definition 2.1 nicht erfüllt. Aus den genannten Eigenschaften folgt $\mathrm{soc}P(1) \cong S(n)$, denn aus $(P(n) : \Delta(1)) = 1$ folgt, dass $\Delta(1) = P(1)$ ein Subfaktor von $P(n)$ ist und aus $[\Delta(i) : S(1)] = 0$ für alle $i \in Q_0 \setminus \{1\}$ sowie $[\Delta(1) : S(1)] = 1$ folgt $[P(n) : S(1)] = 1$, d.h. $\Delta(1)$ ist ein Untermodul von $P(n)$. Mit etwas mehr Aufwand kann man auch zeigen, dass aus den ersten zwei Axiomen einer 1-quasi-erblichen Algebra und $\mathrm{soc}P(n) \cong S(n)$ für $i \in Q_0$ die Nachbarn von 1 sind, auch $\mathrm{soc}P(i) \cong S(n)$ gilt.
Es besteht also die Möglichkeit, dass sich die Definition einer 1-quasi-erblichen Algebra "reduzieren" lässt.

Aus den Eigenschaften des Dualitäts-Funktors und aus dem letzten Lemma folgt: Für eine 1-quasi-erbliche Algebra A mit $P(n) \cong I(n)$ ist A^{op} auch eine QF-3 Algebra und A^{op}-Modul $P_{A^{op}}(n)$ ist ein minimaler projektiver injektiver treuer A^{op}-Modul. Demnach gilt $P_{A^{op}}(j) \hookrightarrow P_{A^{op}}(n) \cong I_{A^{op}}(n)$ und damit $\mathrm{soc}P_{A^{op}}(j) \cong S_{A^{op}}(n)(= S(n))$ für alle $j \in Q_0^{op}$. Die Standard-Dualität liefert $P(n) \twoheadrightarrow I(j)$ und damit $\mathrm{top}I(j) \cong S(n)$ für alle $j \in Q_0$. Aus den letzten Erläuterungen erhalten wir eine äquivalente Charakterisierung einer 1-quasi-erblichen Algebra:

Eine quasi-erbliche Algebra $(A, \leqslant)$ mit $A = KQ/\mathrm{I}$ ist genau dann *1-quasi-erblich*, wenn für alle $i, j \in Q_0$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- $1 \leqslant j \leqslant n$ für alle $j \in Q_0$,
- $\big[\nabla(i) : S(j)\big] = \big(I(j) : \nabla(i)\big) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \leqslant j, \\ 0 & \text{sonst }, \end{cases}$
- $\mathrm{top}I(j) \cong S(n)$,
- $\Delta(j) \hookrightarrow \Delta(1), \quad \nabla(1) \twoheadrightarrow \nabla(j)$.

Aus den Eigenschaften der zu A gehörenden entgegengesetzten Algebra A^{op} folgt:

Lemma 2.4. *Eine Algebra $(A, \leqslant)$ ist genau dann 1-quasi-erblich, wenn $(A^{op}, \leqslant)$ auch 1-quasi-erblich ist.*

Bemerkung 2.5. Der projektive injektive unzerlegbare Modul $P(n)$ einer 1-quasi-erblichen Algebra A spielt bei deren Betrachtung eine fundamentale Rolle. Aus den Eigenschaften der treuen Moduln erhalten wir, dass die Darstellung von $P(n)$ die Relationen von A vollständig wiedergibt.
Wie bereits bekannt ist, können alle Standard- bzw. Kostandardmoduln und projektive bzw. injektive unzerlegbare Moduln als Unter- bzw. Faktormoduln von $P(n)$ betrachtet werden. Damit sind also die Informationen über Δ- bzw. ∇-Filtrierungen von projektiven bzw. injektiven unzerlegbaren Moduln, über $\mathrm{Hom}_A(P(i), P(j))$, $\mathrm{Hom}_A(I(i), I(j))$ etc. in der Struktur von $P(n)$ enthalten. Aus diesem Grunde findet der Modul $P(n)$ besondere Beachtung.

Bemerkung 2.6. Das Lemma 2.4 zeigt, dass für jede Aussage zu einer 1-quasi-erblichen K-Algebra auch eine entsprechende Aussage gültig ist. Aufgrund der analogen Beweisführung verzichten wir auf die Beweise der dualen Aussagen.

1.2.2 Beispiele

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwenden wir für zwei Elemente a und b einer Menge, auf der eine Halbordnungsrelation definiert ist, genau dann die Bezeichnung $a \lhd b$, wenn a bezüglich dieser Ordnung kleiner als b ist und kein c existiert, das größer als a und kleiner als b ist. Wenn $a \lhd b$, dann nennen wir a und b "Nachbarn".

Um verschiedene Eigenschaften der projektiven unzerlegbaren Moduln *sichtbar* zu machen, werden wir in einigen Fällen den Untermodulverband des projektiven unzerlegbaren Moduls zu dem maximalen Punkt von $(Q_0, \leqslant)$ visualisieren. Dazu verwenden wir die Schreibweise für die Relationen, die Bezeichnungen für die Untermoduln und die symbolische Bedeutung der Farben in den veranschaulichenden Bildern etc. aus der Beschreibung im Unterabschnitt 1.1.1.

Beispiel I. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ die Auslander Algebra von $K[X]/\langle X^n \rangle$ (nähere Einzelheiten über $A(n)$ sind in [DR],[BHRR] zu finden). Der die Algebra $A(n) = \operatorname{End}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} k[X]/\langle X^i \rangle\right)$ beschreibende Köcher $Q(n)$, die Halbordnung $\leqslant$ auf $Q(n)_0$ und die Relationen sind:

$$Q(n): \ 1 \rightleftarrows 2 \quad \cdots \quad i-1 \rightleftarrows i \rightleftarrows i+1 \quad \cdots \quad n-1 \rightleftarrows n \qquad 1 \lhd 2 \lhd \cdots \lhd n$$

$$\begin{array}{rcl} 121 & = & 0, \\ i, i-1, i & = & i, i+1, i \end{array} \quad \text{für alle} \quad i \in \{2, \ldots, n-1\}$$

Die Algebra $A(n)$ ist quasi-erblich und $1 = \min\{(Q(n)_0, \leqslant)\}$ sowie $n = \max\{(Q(n)_0, \leqslant)\}$. Es existiert eine eindeutig bestimmte Jordan-Hölder-Reihe von $\Delta(j)$ und eine eindeutig bestimmte Δ-Filtrierung von $P(j)$ für jedes $j \in Q(n)_0$. Sie sind in der folgenden Filtrierung von $P(n)$ durch Schweifklammern darunter hervorgehoben. So wird erkennbar, dass die Eigenschaft $\Delta(j) \hookrightarrow \Delta(1)$ für alle $j \in Q(n)_0$ erfüllt ist.

$$\underbrace{\Delta(n) \subset \Delta(n-1) \cdots \subset \Delta(j)}_{\text{die Jordan-Hölder-Reihe von } \Delta(j)} \subset \cdots \subset \Delta(1) = \underbrace{P(1) \subset P(2) \subset \cdots \subset P(j)}_{\text{die } \Delta\text{-Filtrierung von } P(j)} \subset \cdots \subset P(n)$$

Es gilt also $\Delta(j)/\Delta(j+1) \cong S(j)$ und $P(j)/P(j-1) \cong \Delta(j)$ und für jedes $j \in Q(n)_0$ erhalten wir $[\Delta(i) : S(j)] = (P(j) : \Delta(i)) = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, j\}$ und $[\Delta(i) : S(j)] = (P(j) : \Delta(i)) = 0$ für alle $i \in \{j+1, \ldots, n\}$. Außerdem gilt $P(n) \cong I(n)$ und für jedes $j \in Q(n)_0$ erhalten wir damit $\operatorname{soc} P(j) \cong S(n)$. Aus den dualen Eigenschaften folgt:

$$I(n) \twoheadrightarrow I(n-1) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow I(j) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow I(1) = \nabla(1) \twoheadrightarrow \nabla(2) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \nabla(j) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \nabla(n)$$

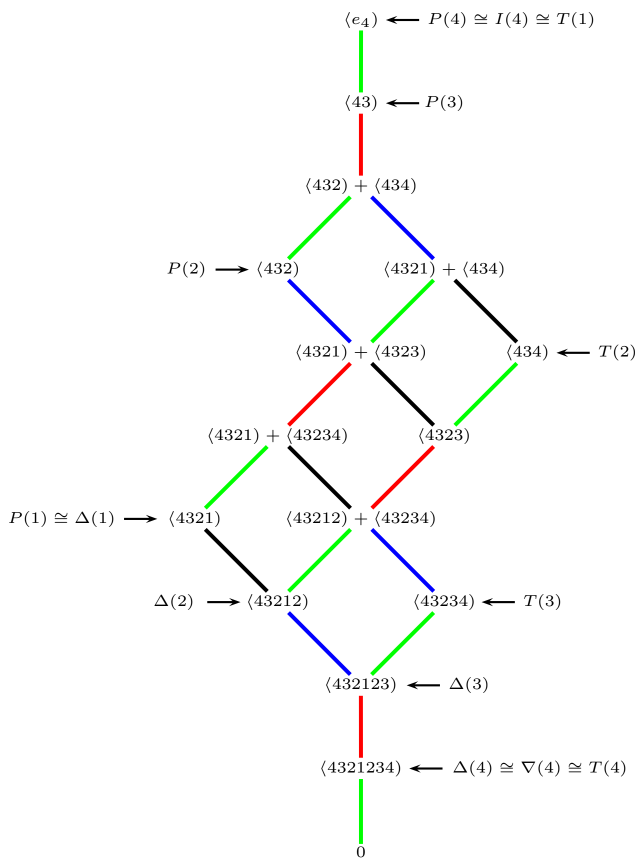
Offensichtlich gilt $\nabla(1) \twoheadrightarrow \nabla(j)$ für alle $j \in Q(n)_0$. Die Algebra $A(n)$ ist damit 1-quasi-erblich.

Jeder direkte Summand des charakteristischen Kippmoduls $T = \bigoplus_{j \in Q_0} T(j)$ ist sowohl Unter- als auch Faktormodul von $P(n)$.
Sie stehen in der folgenden Beziehung zu projektiven- , injektiven unzerlegbaren Moduln und Kostandardmoduln: $T(j) \cong P(n)/P(j-1)$, $I(j) \cong P(n)/T(j+1)$ und $T(j)/T(j+1) \cong \nabla(j)$. Die Filtrierung

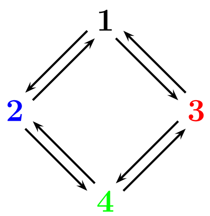
$0 \subset T(n) \subset T(n-1) \subset \cdots \subset T(1) = P(n)$

ist die einzige ∇-Filtrierung von $P(n)$.
Die *wichtigsten* $A(n)$-Moduln sind somit Unter- oder Faktormoduln von $P(n)$ und damit in dem Untermodulverband von $P(n)$ wiederzufinden. Der Untermodulverband (rechts) des $A(4)$-Moduls $P(4)$ ist entsprechend der Beschreibung in 1.1.1 visualisiert, wobei der Symbolcharakter der Farben aus dem Köcher von $A(4)$ zu entnehmen ist:

$Q(4): \mathbf{1} \rightleftarrows \mathbf{2} \rightleftarrows \mathbf{3} \rightleftarrows \mathbf{4}$ $\quad \begin{array}{ccc} 121 & = & 0 \\ 212 & = & 232 \\ 323 & = & 343 \end{array}$



Beispiel II. Die K-Algebra A sei durch den folgenden Köcher und Relationen gegeben:



$$\begin{array}{rclcrcl} 124 & = & 134, & & 212 & = & 242, \\ 421 & = & 431, & & 313 & = & 343, \\ 121 & = & 0, & & 213 & = & q \cdot 243 \ (q \in K), \\ 131 & = & 0, & & 342 & = & 0. \end{array}$$

Die Halbordnung auf den Punkten des Köchers ist $1 \lhd 2 \lhd 4$, $1 \lhd 3 \lhd 4$. Damit ist 1 das minimale und 4 das maximale Element bezüglich dieser Ordnung. Betrachten wir diese Algebra genauer, dann erhalten wir, dass der projektive unzerlegbare A-Modul zu Punkt 4 auch injektiv ist. Außerdem sind die folgenden A-Modul-Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} A.e_1 & \longrightarrow & A.e_2 \\ a.e_1 & \mapsto & a.(21).e_2 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} A.e_1 & \longrightarrow & A.e_3 \\ a.e_1 & \mapsto & a.(31).e_3 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} A.e_2 & \longrightarrow & A.e_4 \\ a.e_2 & \mapsto & a.(42).e_4 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} A.e_3 & \longrightarrow & A.e_4 \\ a.e_3 & \mapsto & a.(43).e_4 \end{array}$$

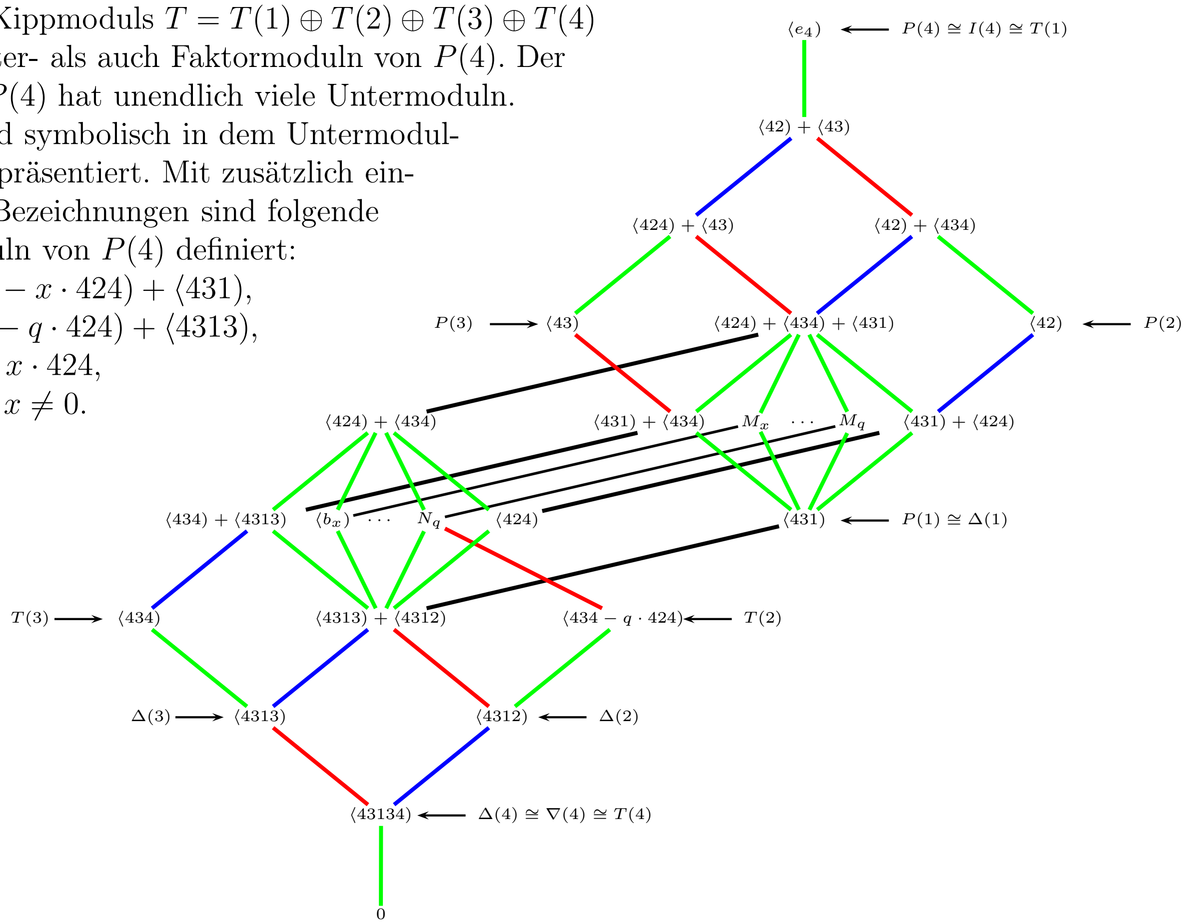
eindeutig bestimmte injektive Homomorphismen zwischen den projektiven unzerlegbaren A-Moduln, d.h. $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ sind Untermoduln von $P(4)$ und deren Untermodulverbände sind im Untermodulverband von $P(4)$ zu finden. Er ist nach dem bereits bekannten Verfahren unten visualisiert.

Für die Standard- und injektiven unzerlegbaren A-Moduln gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta(1) &= P(1) = \langle 431\rangle\,,\\
\Delta(2) &= P(2)/P(1) = \langle 42\rangle \,/\, \langle 431\rangle \cong \langle 4312\rangle \subset \Delta(1),\\
\Delta(3) &= P(3)/P(1) = \langle 43\rangle \,/\, \langle 431\rangle \cong \langle 4313\rangle \subset \Delta(1),\\
\Delta(4) &= P(4)/\,(P(2)+P(3))\\
&= \langle e_4\rangle \,/\, (\langle 43\rangle + \langle 42\rangle) \cong \langle 43134\rangle \subset \Delta(1).
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
I(1) &= \langle e_4\rangle \,/\, (\langle 424\rangle + \langle 434\rangle)\,,\\
I(2) &= \langle e_4\rangle \,/\, \langle 434\rangle\,,\\
I(3) &= \langle e_4\rangle \,/\, \langle 434 - q\cdot 424\rangle\,,\\
I(4) &= P(4) = \langle e_4\rangle\,.
\end{aligned}$$

Die Moduln $P(1)$, $P(2)$ und $P(3)$ besitzen genau eine Δ-Filtrierung, nämlich $0 \subset P(1)$, $0 \subset P(1) \subset P(2)$ und $0 \subset P(1) \subset P(3)$. Der Modul $P(4)$ besitzt genau zwei Δ-Filtrierungen und zwar $0 \subset P(1) \subset P(j) \subset P(2) + P(3) \subset P(4)$ für $j = 2, 3$. Außerdem sind alle Kostandardmoduln Faktormoduln von $I(1)$, genauer: $\nabla(1) = I(1)$, $\nabla(2) = \langle e_4\rangle \,/\, (\langle 424\rangle + \langle 43\rangle)$, $\nabla(3) = \langle e_4\rangle \,/\, (\langle 434\rangle + \langle 42\rangle)$, $\nabla(4) = \langle e_4\rangle \,/\, (\langle 42\rangle + \langle 43\rangle)$. Offensichtich sind auch die Multiplizitäten-Eigenschaften erfüllt. Die Algebra A ist demnach 1-quasi-erblich.

Auch hier sind alle unzerlegbaren Summanden des charakteristischen Kippmoduls $T = T(1) \oplus T(2) \oplus T(3) \oplus T(4)$ sowohl Unter- als auch Faktormoduln von $P(4)$. Der A-Modul $P(4)$ hat unendlich viele Untermoduln. Sie alle sind symbolisch in dem Untermodulverband repräsentiert. Mit zusätzlich eingeführten Bezeichnungen sind folgende Untermoduln von $P(4)$ definiert:
$M_x = \langle 434 - x \cdot 424\rangle + \langle 431\rangle$,
$N_q = \langle 434 - q \cdot 424\rangle + \langle 4313\rangle$,
$b_x = 434 - x \cdot 424$,
$x \in K$ mit $x \neq 0$.



Beispiel III. Sei $\mathcal{O}_\theta(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$ ein regulärer Block der BGG Kategorie $\mathcal{O}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$. Die Grundlagen dazu sind in [BGG1], [MP], [J] zu finden. Aus der Theorie der halbeinfachen komplexen Lie-Algebren ist bekannt, dass $\mathcal{O}_\theta(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$ zu der Kategorie der endlich dimensionalen Moduln über eine basische Algebra $A(\mathfrak{g}(\mathbb{C})) = \mathbb{C}Q_\mathfrak{g}/\mathrm{I}_\mathfrak{g}$ äquivalent ist. Hier ist eine kurze Zusammenfassung über die Begriffe aus der Kategorie $\mathcal{O}_\theta(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$ und deren Entsprechungen in $\mathrm{mod} - A(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Elemente der Weyl Gruppe } W(\mathfrak{g}) \ \ (w) & \leadsto & (Q_{\mathfrak{g}})_0 \ \ (i_w) \\
\text{Bruhat Ordnung } \leq \text{ auf } W(\mathfrak{g}) \ \ (id \leq w \leq w_0) & \leadsto & \text{Halbordnung } \leqslant \text{ auf } (Q_{\mathfrak{g}})_0 \ \ i_{id} \leqslant i \leqslant i_{w_0} \\
\text{Verma Modul } \ V(\lambda_w) & \leadsto & \text{Standardmoduln } \Delta(i_w), \\
\text{Koverma Modul } \ \Lambda(\lambda_w) & \leadsto & \text{Kostandardmoduln } \nabla(i_w), \\
\text{BGG-Reziprozitätsformel} & \leadsto & (P(i_\lambda) : \Delta(i_\mu)) = [\Delta(i_\mu) : S(i_\lambda)] \\
V(\lambda_w) \subseteq V(\lambda_{id}) & \leadsto & \Delta(i_w) \hookrightarrow \Delta(i_{id})
\end{array}$$

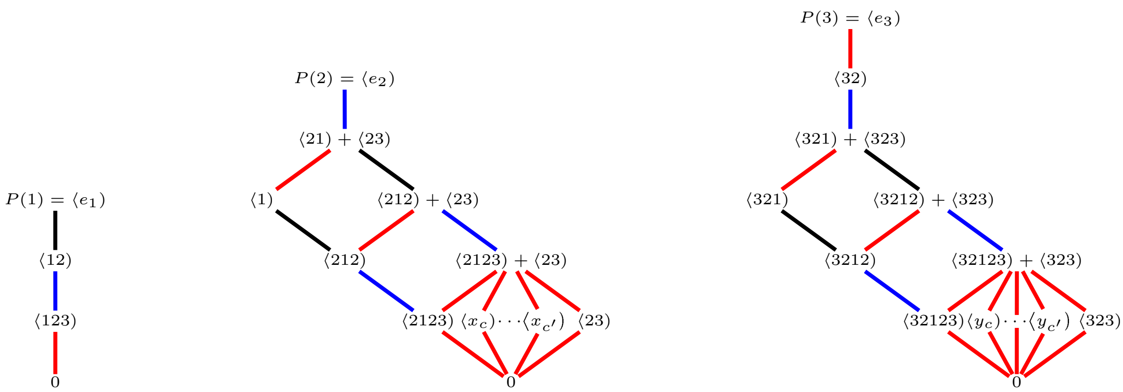
Die Eigenschaften $[\Delta(i_\mu) : S(i_\lambda)] = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i_\mu \leqslant i_\lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und $\mathrm{soc}P(i_\lambda) \cong S(i_{w_0})$ sind genau dann erfüllt, wenn der Rang von $\mathfrak{g}$ höchstens 2 ist. Die Algebra $A(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$ ist 1-quasi-erblich wenn $\mathfrak{g}$ vom Typ A_1, A_2, B_2 oder G_2 ist. Die zu diesen Algebren gehörenden Köcher und Relationen sind in [S] beschrieben. Im letzten Abschnitt haben wir $A(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$ für $\mathfrak{g}$ vom Typ A_2 vorgestellt.

Beispiel IV. Das die K-Algebra A beschreibende Paar (Q, I) sei gegeben durch

$$Q : \mathbf{1} \rightleftarrows \mathbf{2} \rightleftarrows \mathbf{3} \quad \text{mit der Halbordnung } 1 \lhd 2 \lhd 3$$

$$121 = 0 \quad \text{und} \quad 232 = 0.$$

Wir betrachten nun die Algebra $A = kQ/\mathrm{I}$. Die Struktur der projektiven unzerlegbaren A-Moduln $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ sind durch deren Untermodulverband verdeutlicht (hier $x_c = 2123 + c \cdot 23$ und $y_c = 32123 + c \cdot 323$ für ein $c \in K$ mit $c \neq 0$):



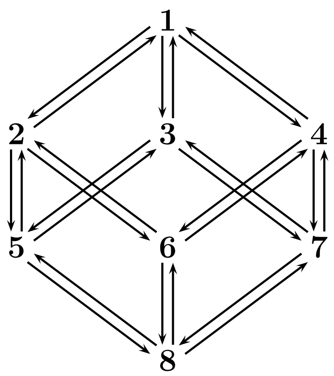
Der größte Faktormodul von $P(j)$ mit der Eigenschaft "ist $S(k)$ ein Kompositionsfaktor von diesem Faktormodul, dann gilt $j \leqslant k$", also der Modul $\Delta(j)$ (für $j = 1, 2, 3$), ist:

$$\begin{array}{rcl}
\Delta(1) & = & P(1), \\
\Delta(2) & = & P(2)/\mathrm{Im}F \cong (12) \subset \Delta(1), \\
\Delta(3) & = & P(3)/\mathrm{Im}G \cong (123) \subset \Delta(1).
\end{array}$$

Es gilt $[\Delta(i) : S(j)] = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \leqslant j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und damit auch $\mathrm{End}_A(\Delta(i)) \cong K$ für $i = 1, 2, 3$. Die Filtrierungen $0 \subset P(1)$, $0 \subset (21) \subset P(2)$ und $0 \subset (321) \subset (32) \subset P(3)$ sind Δ-Filtrierungen von den projektiven unzerlegbaren A-Moduln und damit ist die Algebra A quasi-erblich. Außerdem gilt $[P(j) : \Delta(i)] = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \leq j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Dennoch ist A keine 1-quasi-erbliche Algebra, denn $\mathrm{soc}P(2) \cong \mathrm{soc}P(3) \cong S(3) \oplus S(3)$.

Beispiel V. Die K-Algebra A sei durch den folgenden Köcher mit Relationen gegeben. Einzelheiten werden hier nicht bearbeitet. Es bleibt dem Leser überlassen sich einzuarbeiten und festzustellen, dass die hier gegebene Algebra eine 1-quasi-erbliche Algebra ist.
Dieses Beispiel wird in dieser Arbeit oft herangezogen, um die Aussagen über eine 1-quasi-erbliche Algebra zu veranschaulichen. (Auf diesem, wie auch auf einigen anderen Köchern gibt es mehrere "Kollektionen" von Relationen, die paarweise nicht isomorphe 1-quasi-erbliche K-Algebren beschreiben.)



$$\begin{array}{rcl}
121 & = & 0 \\
131 & = & 0 \\
141 & = & 0 \\
\\
125 & = & 135 \\
137 & = & 147 \\
126 & = & 146 \\
258 & = & 268 \\
358 & = & 378 \\
468 & = & 478 \\
\\
521 & = & 531 \\
731 & = & 741 \\
621 & = & 641 \\
852 & = & 862 \\
853 & = & 873 \\
864 & = & 874 \\
\\
252 & = & 0 \\
262 & = & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
253 & = & 213 \\
264 & = & 214 \\
352 & = & 312 \\
353 & = & -313 \\
373 & = & 0 \\
374 & = & 314 \\
462 & = & 412 \\
464 & = & 0 \\
473 & = & 413 \\
474 & = & -414 \\
\\
585 & = & 0 \\
526 & = & 586 \\
537 & = & 587 \\
\\
685 & = & 625 \\
686 & = & -626 \\
687 & = & 647 \\
\\
785 & = & 735 \\
786 & = & 746 \\
787 & = & -(747 + 737)
\end{array}$$

1.3 Eigenschaften einer 1-quasi-erblichen Algebra

Weiterhin betrachten wir einige aus der Definition 1.2.1 folgenden Eigenschaften einer 1-quasi-erblichen K-Algebra.
Von besonderem Interesse werden hier gewisse lokale Untermoduln von projektiven unzerlegbaren A-Moduln sein. Deren spezifische Eigenschaften werden zu der Bestimmung des Köchers und zu einigen Aussagen über die Relationen führen.
Wie bereits erwähnt, gilt für jede Aussage zu einer 1-quasi-erblichen Algebra auch eine entsprechende duale Aussage, auf deren Beweisführung hier verzichtet wird.

In diesem Abschnitt ist $A = KQ/\mathrm{I}$ durchgehend eine 1-quasi-erbliche K-Algebra, $\leqslant$ die auf $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$ gegebene Halbordnungsrelation,

$$\{1\} = \min\{(Q_0, \leqslant)\} \quad \text{und} \quad \{n\} = \max\{(Q_0, \leqslant)\}.$$

Dies setzen wir für die folgenden Betrachtungen stets voraus und werden es für die Aussagen in diesem Abschnitt nicht weiter explizit benennen.

Bis zum Ende dieser Arbeit verwenden wir außerdem folgende Bezeichnungen: Für jedes $j \in Q_0$ sei

- $\Lambda^{(j)} := \{i \in Q_0 \mid i \leqslant j\}$,
- $\Lambda_{(j)} := \{i \in Q_0 \mid j \leqslant i\}$,

Die Multiplizitäten-Eigenschaften zeigen, dass für jedes $j \in Q_0$ der Dimensionsvektor von $\Delta(j)$, $\nabla(j)$, $P(j)$, $I(j)$ und damit auch deren Dimension sowie die Dimensionen von A unmittelbar mit der Struktur der Halbordnung $\leqslant$ auf Q_0 verbunden ist.

Lemma 3.1. *Sei $i \in Q_0$ und $m_i := \left|\Lambda_{(i)}\right|$. Dann gilt:*

(a)$dim_K\Delta(i) = dim_K\nabla(i) = m_i$, (b)$dim_K P(j) = dim_K I(j) = \sum\limits_{i\in\Lambda^{(j)}} m_i$, (c)$dim_K A = \sum\limits_{i\in Q_0} m_i^2$.

Beweis. (a) Aus $\dim_K\Delta(i) = \sum_{j\in Q_0}[\Delta(i) : S(j)]$ und der Multiplizitäten-Eigenschaft folgt $\dim_K\Delta(i) = \sum_{j\in\Lambda_{(i)}} 1 = \mathrm{m}_i$. Da $[\Delta(i) : S(j)] = [\nabla(i) : S(j)]$ für alle $j \in Q_0$, erhalten wir $\dim_K\nabla(i) = \mathrm{m}_i$.

(b) Sei $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{l-1} \subset M_l \subset \cdots \subset M_k = P(j)$ eine Δ-Filtrierung von $P(j)$, wobei $M_l/M_{l-1} \cong \Delta(i_l)$ mit $1 \le l \le k$. Aus der Multiplizitäten-Eigenschaft $(P(j) : \Delta(i)) = 1$ für $i \leqslant j$ und $(P(j) : \Delta(i)) = 0$ für $i \nleqslant j$, folgt $\{\Delta(i_l) \mid 1 \le l \le k\} = \left\{\Delta(i) \mid i \in \Lambda^{(l)}\right\}$. Somit gilt $\dim_K P(j) = \sum_{l=1}^{t}\dim_K\Delta(i_l) = \sum_{i\in\Lambda^{(j)}}\dim_K\Delta(i) = \sum_{i\in\Lambda^{(j)}}\mathrm{m}_i$. Wie bereits in 1.2.1 gezeigt wurde, gilt $\dim_K P(j) = \dim_K I(j)$ für alle $j \in Q_0$.

(c) Die Algebra A ist basisch. Demzufolge gilt $\dim_K A = \sum_{j\in Q_0}\dim_K P(j) = \sum_{j\in Q_0}\sum_{i\leqslant j}\mathrm{m}_i$. Für $k \in Q_0$ bezeichnen wir mit c_k die Summe der Summanden in $\sum_{j\in Q_0}\sum_{i\leqslant j}\mathrm{m}_i$, die m_k gleich sind, d.h. $c_k := \sum_{i\in\Lambda_{(k)}}\mathrm{m}_k = \mathrm{m}_k\sum_{i\in\Lambda_{(k)}} 1$, d.h. $c_k = \left|\Lambda_{(k)}\right| \cdot \mathrm{m}_k = \mathrm{m}_k^2$. Durch die Umformung erhalten wir $\sum_{i\in Q_0}\sum_{j\leqslant i} n_j = \sum_{i\in Q_0} c_i = \sum_{i\in Q_0}\mathrm{m}_i^2$ und damit $\dim_K A = \sum_{i\in Q_0}\mathrm{m}_i^2$. □

Die Multiplizitäten-Eigenschaften implizieren auch die Anzahl der zu $S(i)$ isomorphen Kompositionsfaktoren in einer Jordan-Hölder-Reihe der projektiven unzerlegbaren Moduln, d.h. die i-te Koordinate des Dimensionsvektors von $P(j)$ für alle $i, j \in Q_0$.

Lemma 3.2. *Sei $i, j \in Q_0$ und $n(i,j) := \left|\Lambda^{(i)} \cap \Lambda^{(j)}\right|$. Dann gilt*

$$[P(j) : S(i)] = [I(j) : S(i)] = n(i,j).$$

Beweis. Sei $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{l-1} \subset M_l \subset \cdots \subset M_k = P(j)$ eine Δ-Filtrierung von $P(j)$, wobei $M_l/M_{l-1} \cong \Delta(i_l)$ mit $1 \le l \le k$. Für die i-te Koordinate des Dimensionsvektors von $P(j)$ gilt $[P(j) : S(i)] = \sum_{t=1}^{k}[M_l/M_{l-1} : S(i)] = \sum_{l=1}^{k}[\Delta(i_l) : S(i)]$ und aus $\{\Delta(i_l) \mid 1 \le l \le k\} = \left\{\Delta(p) \mid p \in \Lambda^{(j)}\right\}$ erhalten wir $[P(j) : S(i)] = \sum_{p\in\Lambda^{(j)}}[\Delta(p) : S(i)]$. Da $[\Delta(p) : S(i)] = 1$ wenn $p \leqslant i$ und sonst 0, erhalten wir $[P(j) : S(i)] = \sum_{p\in\Lambda^{(i)}\cap\Lambda^{(j)}} 1 = \mathrm{n}(i,j)$. Aus den gleichen Eigenschaften für die Kostandardmoduln erhalten wir $[I(j) : S(i)] = \mathrm{n}(i,j)$. □

Bemerkung 3.3. Aus dem letzten Lemma folgt $[P(j) : S(i)] = [P(i) : S(j)]$ und $[I(j) : S(i)] = [I(i) : S(j)]$. Dies gilt für jede quasi-erbliche K-Algebra $\mathcal{A}$ und zwar aufgrund der Symmetrie ihrer Cartan-Matrix $C_{\mathcal{A}} = (c_{ij})_{1\le i,j\le n}$, hier $c_{ij} := [P(j) : S(i)]$ siehe [F].

Die Multiplizitäten-Eigenschaften sind auch für die Bestimmung aller projektiven Untermoduln der projektiven unzerlegbaren A-Moduln unverzichtbar. Wie bereits erwähnt, können alle projektiven unzerlegbaren A-Moduln in $P(n)$ eingebettet werden. Nachfolgend betrachten wir sie als Untermoduln von $P(n)$.

Lemma 3.4. *Seien $j \in Q_0$, dann gilt*

(a) $P(i)$ ist genau dann ein Untermodul von $P(j)$, wenn $i \in \Lambda^{(j)}$.

*(b) Wenn $U \in$ **Lok**$(P(j) \mid S(i))$, dann $U \in$ **Lok**$(P(i) \mid S(i))$ für jedes $i \in \Lambda^{(j)}$. Insbesondere existiert ein eindeutig bestimmter, zu $P(i)$ isomorpher Untermodul von $P(j)$.*

Beweis. (a) " $\Rightarrow$ " Angenommen $P(i) \hookrightarrow P(j)$ aber $i \nleqslant j$, dann gilt (i) $i > j$ oder (ii) i, j sind unvergleichbar. Der Modul $P(i)$ ist also ein echter Untermodul von $P(j)$. Aus den Eigenschaften des Dimensionsvektors folgt deshalb $[P(j) : S(j)] > [P(i) : S(j)]$ und $[P(j) : S(k)] \geq [P(i) : S(k)]$ für alle $k \in Q_0$ (hier gilt auch $\mathrm{n}(i, j) = \left|\Lambda^{(i)} \cap \Lambda^{(j)}\right|$).

(i) Wenn $i > j$, dann $\Lambda^{(i)} \cap \Lambda^{(j)} = \Lambda^{(j)}$ und damit gilt $\mathrm{n}(j, j) = \mathrm{n}(i, j)$. Nach Lemma 3.2 gilt $[P(j) : S(j)] = [P(i) : S(j)]$. Dies steht im Widerspruch zu der Ungleichung oben.

(ii) Sind i und j unvergleichbar, dann gilt $\mathrm{n}(i, j) < \mathrm{n}(i, i)$. Aus Lemma 3.2 erhalten wir $[P(j) : S(i)] < [P(i) : S(i)]$ und damit einen Widerspruch zu $[P(j) : S(i)] \geq [P(i) : S(i)]$.

" $\Leftarrow$ " Sei $i \leqslant j$ und $P(i) \nsubseteq P(j)$. Wir betrachten die Filtrierung $0 \subset P(j) \subset P(i) + P(j) \subset P(n)$. Da $i \leqslant j \leqslant n$ gilt $\mathrm{n}(i, i) = \mathrm{n}(i, j) = \mathrm{n}(i, n)$. Aus den Eigenschaften der Dimensionsvektoren erhalten wir

$$\underbrace{[P(n) : S(i)]}_{=\mathrm{n}(i,n)} = [P(n)/\left(P(i) + P(j)\right) : S(i)] + [\left(P(i) + P(j)\right)/P(j) : S(i)] + \underbrace{[P(j) : S(i)]}_{=\mathrm{n}(i,j)}$$

und damit gilt $[\left(P(i) + P(j)\right)/P(j) : S(i)] = [P(i)/\left(P(i) \cap P(j)\right) : S(i)] = 0$. Das ist aber nur dann möglich, wenn $P(i) \cap P(j) = P(i)$, denn die i-te Koordinate des Dimensionsvektors von einem echten Faktormodul eines Moduls, mit dem zu $S(i)$ isomorphen Kopf, ist von Null verschieden. Wir erhalten also $P(i) \subseteq P(j)$ und damit einen Widerspruch zu $P(i) \nsubseteq P(j)$.
(b) Sei $i \in \Lambda^{(j)}$, also gilt auch $\mathrm{n}(i, i) = \mathrm{n}(i, j)$. Sei $U \in \mathbf{Lok}(P(j) \mid S(i))$.
Angenommen $U \nsubseteq P(i)$. Wir betrachten nun die Filtrierung $0 \subset P(i) \subset P(i) + U \subset P(j)$ von $P(j)$ genauer. Es gilt wiederum

$$\underbrace{[P(j) : S(i)]}_{=\mathrm{n}(i,j)} = [P(j)/\left(P(i) + U\right) : S(i)] + [\left(P(i) + U\right)/P(i) : S(i)] + \underbrace{[P(i) : S(i)]}_{=\mathrm{n}(i,i)}$$

und daraus folgt $[\left(P(i) + U\right)/P(i) : S(i)] = [U/\left(P(i) \cap U\right) : S(i)] = 0$ und mit der gleichen Argumentation wie oben gilt $P(i) \cap U = U$, d.h. U ist ein Untermodul von $P(i)$.
Ist U zu $P(i)$ isomorph, dann gilt nach den letzten Erläuterungen $U = P(i)$. □

Kombinieren wir das Lemma 3.4 mit den Erläuterungen über den reduzierten Ausdruck eines Moduls aus 1.1.1, so erhalten wir eine

Folgerung 3.5. *Sei Λ eine Teilmenge von $\Lambda^{(j)}$, dann ist der Ausdruck $\sum_{i \in \Lambda} P(i)$ genau dann reduziert, wenn die Elemente aus Λ bezüglich $\leqslant$ paarweise nicht vergleichbar sind. In diesem Fall ist dieser Ausdruck eindeutig bestimmt.*

Aus dem letzten Lemma können wir nun leicht den Faktormodul von $P(j)$ bestimmen, der zu $\Delta(j)$ isomorph ist.

Lemma 3.6. *Sei $j \in Q_0$, dann gilt* $\Delta(j) \cong P(j)/\left(\sum_{\substack{i\in Q_0\\ i\lhd j}} P(i)\right)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $\sum_{f\in \mathrm{Hom}_A(P(i),P(j))} \mathrm{Im} f = P(i)$ für ein $i \in Q_0$ mit $i < j$: Sei $f \in \mathrm{Hom}_A(P(i), P(j))$, dann gilt $\mathrm{Im} f \in \mathbf{Lok}(P(j) \mid S(i))$. Nach dem letzten Lemma ist $\mathrm{Im} f$ ein Untermodul von $P(i) \subseteq P(j)$. Da eine Summe von Untermoduln von $P(i)$ wiederum ein Untermodul von $P(i)$ ist, erhalten wir $\sum_{f\in \mathrm{Hom}_A(P(i),P(j))} \mathrm{Im} f \subseteq P(i) \subset P(j)$. Da $P(i) \hookrightarrow P(j) \in \mathrm{Hom}_A(P(i), P(j))$ und $\mathrm{Im}(P(i) \hookrightarrow P(j)) = P(i)$, gilt $\sum_{f\in \mathrm{Hom}_A(P(i),P(j))} \mathrm{Im} f = P(i)$. Seien nun $i_1, \ldots, i_m$ die maximalen Elemente aus Q_0, die kleiner sind als j, d.h. $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{i \in Q_0 \mid i \lhd j\}$. Diese Elemente sind paarweise nicht vergleichbar und für jedes $i \in Q_0$ mit $i < j$ existiert ein $\tilde{i} \in \{i_1, \ldots, i_m\}$ mit $i \leqslant \tilde{i}$, d.h. es gilt $P(\tilde{i}) \nsubseteq \sum_{\substack{i\lhd j\\ i\neq \tilde{i}}} P(i)$ und $P(i) + P(\tilde{i}) = P(\tilde{i})$. Nach der Definition der Standardmoduln erhalten wir $\Delta(j) \cong P(j)/\sum_{i<j} P(i) = P(j)/\sum_{i\lhd j} P(i)$. $\square$

Die Algebra $(A^{op}, \leqslant)$ ist auch eine 1-quasi-erbliche Algebra nach 2.4, somit gelten die letztens bewiesenen Eigenschaften auch für die Standard- und die projektiven unzerlegbaren A^{op}-Moduln. Aus den in 1.1.2 beschriebenen Eigenschaften des Dualitätsfunktors erhalten wir analoge duale Aussagen zu Kostandard- und injektiven unzerlegbaren A-Moduln.

Lemma 3.7. *Sei $j \in Q_0$, dann gilt*

(a) $I(i)$ ist genau dann ein Faktormodul von $I(j)$, wenn $i \in \Lambda^{(j)}$.

(b) Sei W ein Faktormodul von $I(j)$ mit soc$(W) \cong S(j)$ für ein $i \in \Lambda^{(j)}$, dann $I(j) \twoheadrightarrow W$. Insbesondere existiert ein eindeutig bestimmter Faktormodul von $I(j)$, der zu $I(i)$ isomorph ist.

(c) $\nabla(j) \cong \bigcap_{\substack{i\in Q_0\\ i\lhd j}} Ker(I(j) \twoheadrightarrow I(i))$.

1.4 Unter- und Faktormoduln von $P(n)$ mit distributiven Verbänden

In diesem Unterabschnitt zeigen wir, dass aus der Definition einer 1-quasi-erblichen Algebra einige *schöne* Eigenschaften für gewisse Moduln abgeleitet werden können (z.B wenn sie endlich viele Untermodul haben). Aufgrund dieser Eigenschaften werden die Voraussetzungen soc$P(i) \cong S(n)$, $\Delta(i) \hookrightarrow \Delta(1)$ bzw. $\nabla(1) \hookrightarrow \nabla(i)$ für einige Punkte aus dem Köcher überflüssig. Dass sie bereits erfüllt sind, folgt aus soc$P(n) \cong S(n)$.

Die Multiplizitäten-Eigenschaften einer 1-quasi-erblichen Algebra A zeigen, dass jeder Standard - und Kostandardmodul dünn ist. Es gilt also $\dim_K(\Delta(j)_k) = \dim_K(\nabla(j)_k) = 1$, wenn $j \leqslant k$ und $\dim_K(\Delta(j)_k) = \dim_K(\nabla(j)_k) = 0$, wenn $j \nleqslant k$, d.h. ist L ein Untermodul (oder ein Faktormodul) von $\Delta(j)$ bzw. $\nabla(j)$ mit top$L \cong S(k)$ (soc$L \cong S(k)$), dann ist er mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt und es gilt $j \leqslant k$. Der Untermodulverband jedes Standard- bzw. Kostandardmoduls einer 1-quasi-erblichen Algebra ist somit distributiv.

Das nächste Lemma zeigt, dass der erwähnte Untermodul L von $\Delta(j)$ zu dem Standardmodul $\Delta(k)$ isomorph ist und dass L als Faktormodul von $\nabla(j)$ zu $\nabla(k)$ isomorph ist.

Lemma 4.1. *Sei $j \in Q_0$, dann gilt:*

(a) $\Delta(j) \hookrightarrow \Delta(i)$ genau dann, wenn $i \in \Lambda_{(j)}$. Jeder Untermodul von $\Delta(i)$ ist eine Summe von gewissen Standardmoduln aus $\{\Delta(j) \mid j \in \Lambda_{(i)}\}$.

(b) $\nabla(i) \twoheadrightarrow \nabla(j)$ genau dann, wenn $i \in \Lambda_{(j)}$. Jeder Untermodul von $\nabla(i)$ ist ein Schnitt von $Ker(\nabla(i) \twoheadrightarrow \nabla(j))$ für gewisse Kostandardmoduln aus $\{\nabla(j) \mid j \in \Lambda_{(i)}\}$.

Beweis. Nach der Definition einer 1-quasi-erblichen Algebra gilt $[\Delta(1) : S(j)] = 1$ für jedes $j \in Q_0$ und damit $|\mathbf{Lok}(\Delta(1) \mid S(j))| = 1$. Da $\Delta(j) \hookrightarrow \Delta(1)$ erhalten wir $\{\Delta(j)\} = \mathbf{Lok}(\Delta(1) \mid S(j))$. Alle Standardmoduln können also als Untermoduln von $\Delta(1)$ betrachtet werden.
(a) " $\Rightarrow$ " Wenn $\Delta(j) \hookrightarrow \Delta(i)$, dann ist $S(j)$ ein Kompositionsfaktor von $\Delta(i)$ und damit $[\Delta(i) : S(j)] = 1$. Nach der Definition 2.1 gilt $i \leqslant j$.
" $\Leftarrow$ " Wenn $i \leqslant j$, dann $[\Delta(i) : S(j)] = 1$, d.h. $\Delta(i)$ besitzt genau einen Untermodul L_j mit $\mathrm{top} L_j \cong S(j)$. Weil dieser Untermodul auch ein Untermodul von $\Delta(1)$ ist, ist er mit dieser Eigenschaft zu $\Delta(j)$ isomorph. Somit erhalten wir $\Delta(j) \hookrightarrow \Delta(i)$.
Jeder Untermodul von $\Delta(i)$ hat genau einen reduzierten Ausdruck als Summe von gewissen in $\Delta(i)$ enthaltenen lokalen Untermoduln. Weil jeder lokale Untermodul von $\Delta(i)$ ein Standardmodul ist, ist jeder Untermodul von $\Delta(i)$ eine Summe von Standardmoduln.
(b) folgt aus den Dualitäts-Eigenschaften. $\square$

Folgerung 4.2. *Für jedes $i \in Q_0$ gilt*

$$rad\Delta(i) = \sum_{\substack{j \in Q_0 \\ i \lhd j}} \Delta(j) \quad und \quad soc\nabla(i) = \bigcap_{\substack{j \in Q_0 \\ i \lhd j}} Ker(\nabla(i) \twoheadrightarrow \nabla(j)).$$

Beweis. Weil $\Delta(i)$ lokal ist, ist das Radikal von $\Delta(i)$ eine Summe von allen echten lokalen Untermoduln von $\Delta(i)$. Somit gilt nach dem letzten Lemma $\mathrm{rad}\Delta(i) = \sum_{\substack{j \in Q_0 \\ i < j}} \Delta(j)$. Sei $\{j_1, \ldots, j_m\} = \{j \in Q_0 \mid i \lhd j\}$, dann existiert für jedes $j \in Q_0$ mit $i < j$ ein $\tilde{j} \in \{j_1, \ldots, j_m\}$ mit $\tilde{j} \leqslant j$ und nach dem Lemma 4.1 (a) gilt $\Delta(\tilde{j}) + \Delta(j) = \Delta(\tilde{j})$, d.h. $\sum_{\substack{j \in Q_0 \\ i < j}} \Delta(j) = \sum_{\substack{j \in Q_0 \\ i \lhd j}} \Delta(j)$ und damit gilt $\mathrm{rad}\Delta(i) = \sum_{\substack{j \in Q_0 \\ i \lhd j}} \Delta(j)$.
Der Beweis für $\mathrm{soc}\nabla(i) = \bigcap_{\substack{j \in Q_0 \\ i \lhd j}} \mathrm{Ker}\,(\nabla(i) \twoheadrightarrow \nabla(j))$ verläuft dual. $\square$

Letztlich bemerken wir noch eine Eigenschaft der projektiven - bzw. injektiven unzerlegbaren A-Moduln, die zu den Nachbarpunkten des minimalen Elements 1 in $(Q_0, \leqslant))$ korrespondieren. Sie sind keine dünnen Moduln, haben aber distributive Verbände.

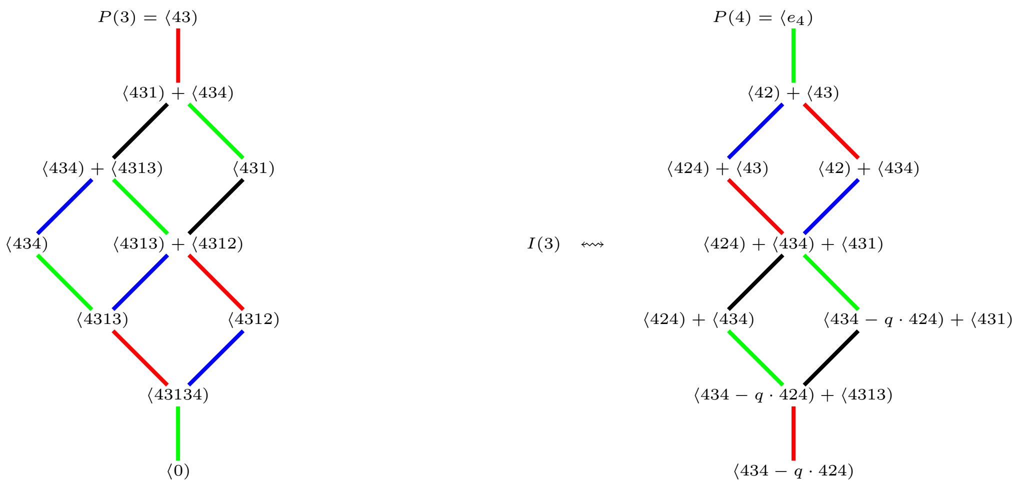
Lemma 4.3. *Sei $j \in Q_0$ mit $1 \lhd j$, dann hat $P(j)$ bzw. $I(j)$ einen distributiven Untermodulverband.*

Beweis. Sei $j \in Q_0$ ein Nachbar von $1 \in Q_0$ (da $1 \leqslant j$, gilt $1 \lhd j$). Nach den Ausführungen im ersten Abschnitt reicht es, Folgendes zu zeigen: Für jedes $k \in Q_0$ mit $P(j)_k \neq 0$

existiert eine Basis $\left\{p_1^{(k)},\ldots,p_{n_k}^{(k)}\right\}$ von $P(j)_k$ mit $\left\langle p_1^{(k)}\right\rangle \subset \cdots \subset \left\langle p_{n_k}^{(k)}\right\rangle$. Aus der Definition 2.1 folgt $[P(j):S(k)] = \begin{cases} 2 & \text{wenn } j \leqslant k,\\ 1 & \text{sonst}\end{cases}$ und $0 \subset \underbrace{P(1)}_{=\Delta(1)} \subset P(2)$ ist die einzige Δ-Filtrierung von $P(j)$ (es gilt $P(j)/P(1) \cong \Delta(j)$). Für jedes $k \in Q_0$ mit $j \nleqslant k$ existiert also genau ein Untermodul von $P(j)$, dessen Kopf zu $S(k)$ isomorph ist. Jedes von Null verschiedene Element aus $P(j)_k$ ist eine Basis von $P(j)_k$ und erfüllt demnach die oben genannte Eigenschaft. Sei nun $k \in Q_0$ mit $j \leqslant k$. Wir zeigen, dass in $P(j)_k$ eine Basis $\left\{p_1^{(k)},p_2^{(k)}\right\}$ mit $\left\langle p_1^{(k)}\right\rangle \subset \left\langle p_2^{(k)}\right\rangle$ existiert. Der Standardmodul $\Delta(k)$ ist ein Untermodul von $P(j)$, denn $\Delta(k) \subset \Delta(1)(= P(1)) \subset P(j)$. Da $\mathrm{top}\Delta(k) \cong S(k)$, existiert ein Element in $P(j)_k$, das $\Delta(k)$ erzeugt. Dieses Element bezeichnen wir mit $p_1^{(k)}$. Sei nun $p_2^{(k)}$ ein zweites Element aus $P(j)_k$, so dass $p_1^{(k)}$ und $p_2^{(k)}$ linear unabhängig sind, d.h. $\left\{p_1^{(k)},p_2^{(k)}\right\}$ ist eine Basis von $P(j)_k$. Wir betrachten nun den von $p_2^{(k)}$ erzeugten Untermodul $\left\langle p_2^{(k)}\right\rangle$ von $P(j)$ (es gilt $\mathrm{top}\left\langle p_2^{(k)}\right\rangle \cong S(k)$). Das Element $p_2^{(k)}$ ist nicht in dem Untermodul $P(1)$ von $P(j)$ enthalten, denn $\Delta(k) = \left\langle p_1^{(k)}\right\rangle \subset P(1)$ und $[P(1):S(k)] = 1$, d.h. $\left\langle p_2^{(k)}\right\rangle \nsubseteq P(1)$. Seien $\begin{array}{cccc} f: & P(k) & \longrightarrow & P(j)\\ & e_k & \mapsto & p_2^{(k)}\end{array}$ und $\begin{array}{cccc} g: & P(j) & \twoheadrightarrow & P(j)/P(1)\\ & e_j & \mapsto & \overline{e_j}\end{array}$ A-Modul Homomorphismen, dann ist die Komposition $F = (g\circ f) : P(k) \xrightarrow{f} P(j) \overset{g}{\twoheadrightarrow} P(j)/P(1) \cong \Delta(j)$ kein 0-Homomorphismus, d.h. $\mathrm{Im}F = \left\langle\overline{p_2^{(k)}}\right\rangle$ ist ein lokaler Untermodul von $\Delta(j)$ mit $\mathrm{top}(\mathrm{Im}F) \cong S(k)$. Nach dem Lemma 4.1 (a) gilt somit $\mathrm{Im}F = \left\langle\overline{p_2^{(k)}}\right\rangle \cong \Delta(k)$. Aus der allgemeinen Faktormodul-Theorie folgt, dass die Teilfiltrierung $\overline{0} \subset \left\langle\overline{p_2^{(k)}}\right\rangle$ von $P(j)/P(1)$ eine Teilfiltrierung $P(1) \subset \left\langle p_2^{(k)}\right\rangle + P(1)$ von $P(j)$ mit $\left(\left\langle p_2^{(k)}\right\rangle + P(1)\right)/P(1) \cong \Delta(k)$ induziert. Nach dem *ersten Isomorphiesatz* erhalten wir $\left\langle p_2^{(k)}\right\rangle / \left(\left\langle p_2^{(k)}\right\rangle \cap P(1)\right) \cong \Delta(k)$. Außerdem gilt $\left\langle p_2^{(k)}\right\rangle \cap P(1) \neq 0$, denn aus der Tatsache, dass der Sockel von $P(j)$ einfach ist, folgt, dass $\mathrm{soc}P(j)$ der Sockel jedes echten Untermoduls von $P(n)$ ist, d.h. $\mathrm{soc}P(j) \subseteq U_1 \cap U_2 \neq 0$ für alle $U_1, U_2 \in \mathbf{UM}(P(j))\setminus\{0\}$. Wir betrachten nun die Filtrierung $0 \subset \left\langle p_2^{(k)}\right\rangle \cap P(1) \subset \left\langle p_2^{(k)}\right\rangle$. Für den oben definierten Homomorphismus f gilt $P(k)/\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Im}f = \left\langle p_2^{(k)}\right\rangle$, somit induziert die letzte Filtrierung von $\left\langle p_2^{(k)}\right\rangle$ eine Teilfiltrierung $\mathrm{Ker}f \subset U \subset P(k)$ von $P(k)$ mit $P(k)/U \cong \left\langle p_2^{(k)}\right\rangle / \left(\left\langle p_2^{(k)}\right\rangle \cap P(1)\right) \cong \Delta(k)$ und $U/\mathrm{Ker}f \cong \left(\left\langle p_2^{(k)}\right\rangle \cap P(1)\right)/0 = \left\langle p_2^{(k)}\right\rangle \cap P(1)$. Nach dem Lemma 3.6 gilt $U = \sum_{\substack{i\in Q_0\\ i\lhd j}} P(i)$. Weil dieser Ausdruck reduziert ist gilt $\mathrm{top}U \cong \bigoplus_{\substack{i\in Q_0\\ i\lhd k}} S(i)$. Nach den Ausführungen im ersten Abschnitt existiert ein $i \in Q_0$ mit $i \lhd k$, so dass $S(i)$ ein direkter Summand von $\mathrm{top}\,(U/\mathrm{Ker}f) \cong \mathrm{top}\left(\left\langle p_2^{(k)}\right\rangle \cap P(1)\right)$ ist. Daraus folgt $\left[\left\langle p_2^{(k)}\right\rangle \cap P(1) : S(i)\right] \neq 0$ und damit existiert ein lokaler Untermodul U von $P(1)$ mit $\mathrm{top}U \cong S(i)$, so dass $U \subset \left\langle p_2^{(k)}\right\rangle$. In $P(1) = \Delta(1)$ gibt es nur einen Untermodul dieser Art und zwar $U = \Delta(i)$ und da $i \lhd k$, gilt nach 4.1 $\Delta(k) \subset \Delta(i)$. Wir erhalten also

$\left\langle p_1^{(k)} \right\rangle = \Delta(k) \subset \Delta(1) \subset \left\langle p_2^{(k)} \right\rangle$. Und dies ist es, was wir zeigen wollten. Der Modul $P(j)$ hat einen distributiven Verband.
Für den injektiven unzerlegbaren A-Modul $I(j)$ mit $1 \triangleleft j$, verläuft der Beweis analog. $\square$

Bemerkung 4.4. Die Anzahl der Untermoduln von $P(j)$ und $I(j)$ für alle $j \in Q_0$ mit $1 \triangleleft j$ ist zwar endlich aber nicht gleich. Dies wird im Beispiel II (Unterabschnitt 1.2.2) deutlich. Für $3 \in Q_0$ gilt $1 \triangleleft 3$. Der Modul $P(3)$ hat 10 Untermoduln und der Modul $I(3)$ hat 9 (siehe folgende Zeichnung von den Untermodulverbänden von $P(3)$ und $I(3) = P(4)/T(2)$. Das rechte Diagramm korrespondiert zu dem Diagramm von $\mathbf{UM}(P(4) \mid T(2))$).



Bemerkung 4.5. Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass der Modul $P(j)$ bzw. $I(j)$ einer 1-quasi-erblichen Algebra genau dann einen distributiven Untermodulverband hat, wenn je zwei Elemente aus $\Lambda^{(j)}$ bezüglich $\leqslant$ vergleichbar sind, d.h. wenn $\Lambda^{(j)}$ mit der Halbordnung, die von $(Q_0, \leqslant)$ induziert ist, total geordnet ist. Dies ist auch im Beispiel I (Unterabschnitt 1.2.2) nachvollziehbar: Für jeden Punkt j aus dem Köcher von $A(n)$ ist $\left(\Lambda^{(j)}, \leqslant\right)$ total geordnet.

Bemerkung 4.6. Im letzten Abschnitt des nächsten Kapitels betrachten wir die Summanden $T(j)$ des charakteristischen Kippmoduls einer 1-quasi-erblichen K-Algebra A. Dort zeigen wir, dass für alle $j \in \{i \in Q_0 \mid i \triangleleft n\}$ der A-Modul $T(j)$ genau 4 Untermoduln hat. Außerdem werden wir sehen, dass für jedes $j \in Q_0$ die Anzahl der Untermoduln von $T(j)$ gleich der Anzahl der Untermoduln von $P_{A(m)}(m)$ für $m = \left|\Lambda_{(j)}\right|$ ist, wenn $\left(\Lambda_{(j)}, \leqslant\right)$ total geordnet ist. Dabei bezeichnen wir mit $A(m)$ weiterhin die Auslander Algebra von $K[x]/\langle x^m \rangle$.

KAPITEL 2

Eine Basis einer 1-quasi-erblichen Algebra

Die im ersten Kapitel ermittelten Eigenschaften geben wichtige Informationen, zur Erweiterung unserer Sicht auf die Struktur einer 1-quasi-erblichen Algebra.
In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels beschreiben wir das Paar (Q, I), das eine 1-quasi-erbliche K-Algebra repräsentiert. Die Ausführungen in diesen Abschnitten bilden die Grundlagen für die Bestimmung einer ausgezeichneten Basis einer 1-quasi-erblichen Algebra, die im Abschnitt 3 eine besondere Aufmerksamkeit erhalten wird.
In der Theorie von quasi-erblichen K-Algebren spielen die Δ-guter und ∇-guter Moduln eine erhebliche Rolle. Wir zeigen im vierten Abschnitt, dass alle Δ- bzw. ∇-Filtrierungen von projektiven bzw. injektiven unzerlegbaren Moduln einer 1-quasi-erblichen Algebra direkt mit der Struktur ihres Köchers verbunden sind.
Am Ende dieses Kapitels betrachten wir einige direkte Summanden des charakteristischen Kippmoduls, die unter bestimmten Bedingungen auch Untermoduln von $P(n)$ für $\{n\} = \max\{(Q, \leqslant)\}$ sind.

Mit A wird in diesem Kapitel stets eine 1-quasi-erbliche K-Algebra bezeichnet, (Q, I) ist das A beschreibende Paar (aus einem Köcher und Relationen). In künftigen Aussagen über 1-quasi-erbliche K-Algebren wird dies nicht mehr explizit erwähnt.

2.1 Köcher einer 1-quasi-erblichen Algebra

Aus den im letzten Kapitel bereits ermittelten Eigenschaften einer 1-quasi-erblichen Algebra A erhalten wir nun alle nötigen Informationen, um den Köcher Q von A explizit zu bestimmen. Wir werden sehen, dass die Pfeile des Köchers in direkter Verbindung mit der Halbordnung $\leqslant$ auf Q_0 stehen. An dieser Stelle sei daran erinnert, dass die Anzahl der Pfeile, die im Punkt j des Köchers starten und im Punkt i enden $[\operatorname{top}(\operatorname{rad} P(j)) : S(i)]$ ist, d.h. die Anzahl der zu $S(i)$ isomorphen direkten Summanden von $\operatorname{top}(\operatorname{rad} P(j))$.

Lemma 1.1. *Für jedes $j \in Q_0$ gilt* $\operatorname{top}(\operatorname{rad} P(j)) \cong \bigoplus_{\substack{i \in Q_0 \\ i \lhd j}} S(i) \oplus \bigoplus_{\substack{i \in Q_0 \\ j \lhd i}} S(i)$.

Beweis. Aus $\Delta(j) \cong P(j) / \left(\sum_{\substack{i \in Q_0 \\ i \lhd j}} P(i)\right)$ (Lemma 3.6 Kap. 1) folgt, dass die Mengen der Untermoduln von $\Delta(j)$ und die der Untermoduln von $P(j)$, die $\sum_{\substack{i \in Q_0 \\ i \lhd j}} P(i)$ enthalten, gleichmächtig sind. Die Abbildung

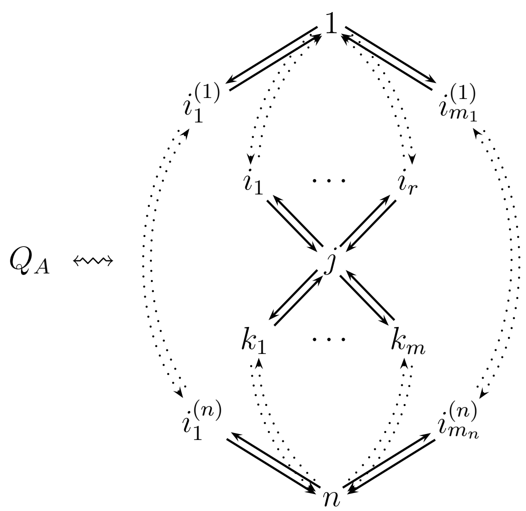
$$F : \left\{ M \in \mathbf{UM}(P(j)) \,\middle|\, \sum_{\substack{i \in Q_0 \\ i \lhd j}} P(i) \subseteq M \right\} \longrightarrow \mathbf{UM}(\Delta(j)) \quad \text{mit} \quad F(M) = M \Bigg/ \left(\sum_{\substack{i \in Q_0 \\ i \lhd j}} P(i) \right)$$

ist also bijektiv und $M' \subseteq M$ genau dann, wenn $F(M') \subseteq F(M)$ sowie $F(\mathrm{rad}P(j)) = \mathrm{rad}\Delta(j)$. Der Standardmodul $\Delta(j)$ hat endlich viele Untermoduln, somit existieren nur endlich viele Untermoduln von $P(j)$, die $\sum_{\substack{i \in Q_0 \\ i \lhd j}} P(i)$ enthalten. Nach Lemma 4.1 (Kap. 1) ist jeder Untermodul von $\Delta(j)$ eine Summe von $\Delta(k)$ für gewisse k aus $\Lambda_{(j)}$. Für solch ein k sei $M(k) = F^{-1}(\Delta(k))$. Es existiert ein lokaler Untermodul $L(k)$ von $P(j)$ mit $\mathrm{top}L(k) \cong S(k)$, so dass $M(k) = L(k) + \sum_{\substack{i \in Q_0 \\ i \lhd j}} P(i)$ und dieser Ausdruck von $M(k)$ reduziert ist. Für jede Teilmenge $\Lambda \subseteq \Lambda_{(j)}$ ist $\sum_{k \in \Lambda} L(k) + \sum_{\substack{i \in Q_0 \\ i \lhd j}} P(i)$ ein reduzierter Ausdruck von $\sum_{k \in \Lambda} M(k)$ und $F\left(\sum_{k \in \Lambda} M(k)\right) = \sum_{k \in \Lambda} \Delta(k)$. Nach der Folgerung 4.2 (Kap. 1) erhalten wir also $F\left(\sum_{\substack{k \in Q_0 \\ j \lhd k}} M(k)\right) = \mathrm{rad}\Delta(j)$ und damit gilt $\mathrm{rad}P(j) = \sum_{\substack{k \in Q_0 \\ j \lhd k}} M(k)$. Der Ausdruck $\sum_{\substack{k \in Q_0 \\ j \lhd k}} L(k) + \sum_{\substack{i \in Q_0 \\ i \lhd j}} P(i)$ ist ein reduzierter Ausdruck von $\mathrm{rad}P(j)$. Nach den Erläuterungen oben gilt somit $\mathrm{top}\,(\mathrm{rad}P(j)) \cong \bigoplus_{i \lhd j} S(i) \oplus \bigoplus_{j \lhd i} S(i)$. $\square$

Bemerkung 1.2. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass der Radikal von $P(j)$ genau einen reduzierten Ausdruck hat, d.h. dass der in dem Beweis mit $L(k)$ bezeichnete Untermodul von $P(j)$ eindeutig bestimmt ist. Nach den Bemerkungen über einen reduzierten Ausdruck aus 1.1.1 (Kap. 1) gilt: Jeder Untermodul L aus $\mathbf{Lok}(P(j) \mid S(k))$ ist ein Untermodul von $L(k)$, für jedes $k \in \Lambda_{(j)}$.

Aus dem letzten Lemma erhalten wir also $[\mathrm{top}\,(\mathrm{rad}P(j)) : S(i)] = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \lhd j, \\ 1 & \text{wenn } j \lhd i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Zwei Punkte i und j in dem Köcher von A sind genau dann verbunden, wenn sie Nachbarn sind. Ist dies der Fall, dann gibt es genau einen Pfeil von i nach j und genau einen Pfeil von j nach i. Der Köcher einer 1-quasi-erblichen Algebra A hat also die im folgenden Bild visualisierte Gestalt:



Für ein fixiertes $j \in Q_0$ sind die Elemente $i_1, \ldots, i_r$ die Nachbarn von j aus $\Lambda^{(j)}$ und die Elemente $k_1, \ldots, k_m$ sind die Nachbarn von j aus $\Lambda_{(j)}$. Es gilt also $i_1 \lhd j, \ldots, i_r \lhd j$ und $j \lhd k_1, \ldots, k_m \lhd j$. Das minimale Element 1 bzgl. der Halbordnung $\leqslant$ auf Q_0 befindet sich oben mit seinen (immer größeren) Nachbarn. Unten befindet sich das maximale Element n aus $(Q_0, \leqslant)$ es gilt $n = |Q_0|$ und auch seine (immer kleineren) Nachbarn. Von jedem Punkt i aus Q_0 gibt es immer einen Weg $i \to i_1 \to \cdots \to i_k \to 1$ mit $i > i_1 > \cdots > i_k > 1$ und einen Weg $i \to i_1 \to \cdots \to i_k \to n$ mit $i < i_1 < \cdots < i_k < n$. Diese Wege sind im Bild punktiert dargestellt.

2.2 Relationen

Aus den bereits erhaltenen Eigenschaften von projektiven unzerlegbaren Moduln einer 1-quasi-erblichen Algebra A lässt sich einiges über die Relationen von A schließen. Zur Erinnerung: Die Elemente des projektiven A-Moduls $P(j)$ betrachten wir als Linearkombinationen der Wege in A, die in j starten. Für einen Weg $\mathrm{w} \in KQ$ bezeichnen wir mit w die Restklasse $\mathrm{w} + \mathrm{I}$ aus KQ/I.

In diesem Abschnitt verwenden wir die bereits im letzten Kapitel eingeführten Bezeichnungen zu gewissen Teilmengen von Q_0, nämlich für $j \in Q_0$ ist $\Lambda^{(j)} = \{i \in Q_0 \mid i \leqslant j\}$ und $\Lambda_{(j)} = \{i \in Q_0 \mid j \leqslant i\}$.

Bemerkung 2.1. Wie bereits erwähnt (1.1.1 Kap. 1), korrespondiert jeder Pfeil bzw. Weg $w \in A$ mit einem Homomorphismus $f_w : P(\mathtt{e}(w)) \longrightarrow P(\mathtt{s}(w))$, wobei $f_w(a \cdot e_{\mathtt{e}(w)}) = a \cdot w \cdot e_{\mathtt{s}(w)}$ und $a \in A$. Außerdem gilt $\mathrm{Im} f_w \in \mathbf{Lok}\,(P(\mathtt{s}(w)) \mid S(\mathtt{e}(w)))$ und w ist ein erzeugendes Element von $\mathrm{Im} f_w$, d.h. $\mathrm{Im} f_w = \langle w)$.
Für zwei Wege $w_1, w_2 \in A$ mit $\mathtt{s}(w_1) = \mathtt{s}(w_2)$ und $\mathtt{e}(w_1) = \mathtt{e}(w_2)$ gilt die Gleichung $\langle w_1) = \mathrm{Im} f_{w_1} = \mathrm{Im} f_{w_2} = \langle w_2)$ genau dann, wenn ein c aus K^* existiert und eine Linearkombination w aus Wegen in KQ, die aus $\mathtt{s}(w_1)$ starten und in $\mathtt{e}(w_1)$ enden, mit $w \in \mathrm{rad}\,\langle w_1)$ und $\mathrm{w}_1 + c \cdot \mathrm{w}_2 + \mathrm{w} \in \mathrm{I}$.
Eine Eigenschaft, die aus dem Köcher einer Basis-Algebra abzulesen ist, beschreibt das Radikal jedes projektiven unzerlegbaren Moduls: Ist $\{j_1, \ldots, j_m\}$ die Menge der Nachbarn von $j \in Q_0$ und $M_k = \mathrm{Im} f_{(j \to k)} = \langle (j \to k))$, dann ist $\mathrm{rad} P(j) = \sum_{k \in \{j_1, \ldots, j_m\}} M_k$ ein reduzierter Ausdruck von $\mathrm{rad} P(j)$.

Lemma 2.2. *Sei $(j \to i) \in Q_1$, dann ist $f_{(j \to i)}$ genau dann eine Inklusion, wenn $i < j$.*

Beweis. Wenn $i \nleqslant j$, dann kann $f_{(j \to i)} : P(i) \longrightarrow P(j)$ nach Lemma 3.4 (Kap. 1) nicht injektiv sein. Wenn $i = j$, dann gilt $f_{(j \to j)} = f_{\mathrm{Id}_{P(j)}}$. Sei also $i < j$. Aus der letzten Bemerkung erhalten wir, dass $\mathrm{Im}\left(f_{(j \to i)} : P(i) \longrightarrow P(j)\right)$ ein Summand eines reduzierten Ausdrucks von $\mathrm{rad} P(j)$ ist. Weil $\mathrm{top}\left(\mathrm{Im} f_{(j \to i)} \cong S(i)\right)$, gilt $\mathrm{Im}\left(f_{(j \to i)}\right) = P(j)$, denn es existiert genau ein Untermodul $U \subset P(j)$ mit $\mathrm{top} U \cong S(i)$, so dass U ein Summand eines reduzierten Ausdrucks von $\mathrm{rad} P(j)$ ist, nämlich $U = P(i)$. Somit ist $f_{(j \to i)}$ eine Inklusion. □

Definition 2.3. Sei $(A = KQ/\mathrm{I}, \leqslant)$ eine 1-quasi-erbliche Algebra und $i, j \in Q_0$ mit $i \in \Lambda^{(j)}$. Sei $\mathrm{w} = (i \to k_1 \to \cdots \to k_t \to \cdots \to k_r \to j)$ ein Weg in KQ mit $i < k_1 < \cdots < k_t < \cdots < k_r < j$. So einen Weg nennen wir einen *fallenden Weg* von i nach j und bezeichnen ihn mit $\mathrm{w} \downarrow (i \to j)$. Analog dazu nennen wir einen Weg $\mathrm{w} = (j \to k_1 \to \cdots \to k_t \to \cdots \to k_r \to i)$ mit $j > k_1 > \cdots > k_t > \cdots > k_r > i$ einen *steigenden Weg* von j nach i und bezeichnen ihn mit $\mathrm{w} \uparrow (j \to i)$. Wenn $i = j$ gilt $\mathrm{w} \downarrow (i \to i) = \mathrm{w} \uparrow (i \to i) = e_i$.

(Die Benennungen "steigend" bzw. "fallend" beziehen sich auf die nach oben bzw. nach unten weisenden Richtungen der jeweiligen Wege in dem Köcher, der eine 1-quasi-erbliche Algebra A beschreibt.)
Die Menge aller fallenden Wege in KQ, die in i starten und in j enden, bezeichnen wir mit $\mathrm{W} \downarrow (i \to j)$. Analog dazu bezeichnen wir die Menge aller steigenden Wege in KQ, die in j

starten und in i enden mit W $\uparrow (j \to i)$. Offensichtlich sind die Mengen W $\downarrow (i \to j)$ und W $\uparrow (i \to j)$ endlich und die Anzahl der Elemente von ihnen ist gleich. Für einen Weg w aus W $\downarrow (i \to j)$ und W $\uparrow (i \to j)$ betrachten wir nun die Eigenschaften des zugehörigen Weges $w = \mathrm{w} + \mathrm{I}$ aus $A = KQ/\mathrm{I}$.

Lemma 2.4. *Sei w ein Weg in A mit $\mathsf{s}(w) = j$ und $\mathsf{e}(w) = i$, dann gilt $\langle w \rangle = P(i)$ genau dann, wenn $w \in W \uparrow (j \to i)$ für jedes $j \in \Lambda_{(i)}$.*
Insbesondere gilt $\langle w \rangle \in radP(i)$ für jeden Weg $w \in A$ mit $\mathsf{s}(w) = j$, $\mathsf{e}(w) = i$ genau dann wenn $w \notin W \uparrow (j \to i)$ für jedes $j \in Q_0$.
Hier betrachten wir $P(i)$ als einen Untermodul von $P(j)$.

Beweis. Zur Erinnerung: Seien $k, k' \in Q_0$ und $w = (k \to k_1 \to \cdots \to k_m \to k')$ ein Weg aus A, dann gilt für $f_w : P(k') \longrightarrow P(k)$

$$f_w = f_{(k \to k_1)} \circ f_{(k_1 \to k_2)} \circ \cdots \circ f_{(k_m \to k')},$$

wobei $f_{(k_t \to k_{t+1})} : P(k_{t+1}) \longrightarrow P(k_t)$ der zum Pfeil $k_t \to k_{t+1}$ korrespondierende Homomorphismus ist.
"$\Leftarrow$". Sei $w = w \uparrow (j \to i)$, dann ist $f_w : P(i) \to P(j)$ eine Komposition von Inklusionen und damit auch eine Inklusion, d.h. $\langle w \rangle = \mathrm{Im} f_w = P(i) \subseteq P(j)$.
"$\Rightarrow$". Sei nun $\mathrm{w} = (j \to k_1 \to \cdots \to k_t \to k_{t+1} \to \cdots \to k_m \to i)$ kein steigender Weg, dann gilt $k_t \lhd k_{t+1}$ für mindestens ein t. Nach Lemma 2.2 ist $f_{(k_t \to k_{t+1})} : P(k_{t+1}) \longrightarrow P(k_t)$ nicht injektiv und damit gilt $\mathrm{soc}P(i) = \mathrm{soc}P(k_{t+1}) \in \mathrm{Ker} f_{(k_t \to k_{t+1})}$. Somit ist f_w keine Inklusion. Wenn $\mathrm{w} \notin \mathrm{W} \uparrow (j \to i)$, dann ist $\mathrm{Im} f_w$ ein echter Untermodul von $P(i)$ (nach Lemma 3.4 Kap. 1), denn $\mathrm{top}(\mathrm{Im} f_w) \cong S(i)$ und $\mathrm{Im} f_w \neq P(i)$. Somit gilt $w \in \mathrm{rad}P(i)$. □

Nach der Bemerkung 2.1 können wir nun einiges über Relationen einer 1-quasi-erblichen K-Algebra $A = KQ/\mathrm{I}$ folgern:

Lemma 2.5. *Seien $i, j \in Q_0$ mit $i \in \Lambda^{(j)}$.*

(a) Für $w_1, w_2 \in W \uparrow (j \to i)$ existiert ein $c \in K^*$ und $w = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot u_k$, wobei $\lambda_k \in K$, $\mathsf{s}(u_k) = j$, $\mathsf{e}(u_k) = i$ und $u_k \notin W \uparrow (j \to i)$ für alle $k \in [1, m]$, so dass Folgendes gilt:

$$w_1 + c \cdot w_2 + w \in I$$

(b) Für $w_1, w_2 \in W \downarrow (i \to j)$ existiert ein $c \in K^*$ und $w = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot u_k$, wobei $\lambda_k \in K$, $\mathsf{s}(u_k) = i$, $\mathsf{e}(u_k) = j$ und $u_k \notin W \downarrow (i \to j)$ für alle $k \in [1, m]$, so dass Folgendes gilt:

$$w_1 + c \cdot w_2 + w \in I$$

(c) Für jedes $j \in Q_0 \backslash \{1\}$ ist der Weg $w_1 \cdot w_2$ in A ein 0-Weg für alle $w_1 \in W \uparrow (1 \to i)$ und alle $w_2 \in W \downarrow (i \to 1)$. Insbesondere gilt $(1 \to j \to 1) \in \mathcal{I}$ für alle $j \in Q_0$ mit $1 \lhd j$.

Beweis. (a) Nach dem Lemma 2.4 gilt $\langle w_1 \rangle = \langle w_2 \rangle$ für $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathrm{W} \uparrow (j \to i)$. Wie bereits in 2.1 erwähnt erhalten wir $\mathrm{w}_1 + c \cdot \mathrm{w}_2 + \mathrm{w} \in \mathrm{I}$ für ein $c \in K^*$ und ein $w \in \mathrm{rad}\, \langle w_1 \rangle$, wobei w eine Linearkombination aus Wegen in KQ ist, die aus j starten und in i enden. Nach dem

Lemma 2.4 erhalten wir, dass die linearen Summanden von w nicht aus $\mathrm{W}\uparrow(j\to i)$ sind.
(b) Der Beweis verläuft durch Widerspruch. Angenommen $\mathrm{w}_1=(i\to k_1\to\cdots\to k_m\to j)$ und $\mathrm{w}_2=(i\to\tilde{k}_1\to\cdots\to\tilde{k}_{\tilde{m}}\to j)$ sind aus $\mathrm{W}\downarrow(i\to j)$ und $\mathrm{w}_1+c\cdot\mathrm{w}_2+\mathrm{w}\notin\mathrm{I}$ für alle $c\in K^*$ und alle $\mathrm{w}\in\mathrm{span}_K\{\mathrm{u}\mid\mathtt{s}(\mathrm{u})=i,\ \mathtt{e}(\mathrm{u})=j,\ \mathrm{u}\notin\mathrm{W}\downarrow(i\to j)\}$. Für die steigenden Wege $\mathrm{w}_1^{op}=(j\to k_m\to\cdots\to k_1\to i)$ und $\mathrm{w}_2^{op}=(j\to\tilde{k}_{\tilde{m}}\to\cdots\to\tilde{k}_1\to i)$ aus $(KQ)^{op}$ gilt dann $\mathrm{w}_1^{op}+c\cdot\mathrm{w}_2^{op}+\mathrm{w}^{op}\notin\mathrm{I}^{op}$. Nach Lemma 2.4 (Kap.1) ist A^{op} eine 1-quasi-erbliche Algebra und damit erhalten wir aus (a) einen Widerspruch.
(c) Sei $j\in Q_0$ mit $j\neq 1$, dann $1<j$. Sei $\mathrm{w}=\mathrm{w}\uparrow(j\to 1)\cdot\mathrm{w}\downarrow(1\to j)$, dann ist $f_w: P(1)\overset{f_{(j\to 1)}}{\to}P(j)\overset{f_{(1\to j)}}{\to}P(1)$ ist nicht injektiv. Aus $\dim_K\mathrm{End}_A(P(1))=\dim_K\mathrm{End}_A(\Delta(1))=1$ erhalten wir $f_w=0$ und damit ist w ein 0-Weg. Dies gilt insbesondere für alle j mit $1\lhd j$, d.h. $(1\to j\to 1)$ ist eine 0-Relation. $\square$

Folgerung 2.6. *Für $i,j\in Q_0$ mit $i\in\Lambda^{(j)}$ und $w,w'\in W\!\uparrow(j\to i)$ bzw. $u,u'\in W\!\downarrow(i\to j)$ gilt $\langle w\rangle=\langle w'\rangle$ bzw. $\langle u\rangle=\langle u'\rangle$. Insbesondere gilt:*

- *Jeder $U\in\boldsymbol{Lok}(P(j)\mid S(i))$ ist ein Untermodul von $\langle w\rangle$.*
- *Jeder $U\in\boldsymbol{Lok}(P(i)\mid S(j))$ ist ein Untermodul von $\langle u\rangle$.*

Das Radikal von $P(j)$ hat einen eindeutig bestimmten reduzierten Ausdruck $radP(j)=\sum_{\substack{i\in Q_0\\ i\lhd j}}\langle(j\to i)\rangle+\sum_{\substack{i\in Q_0\\ j\lhd i}}\langle(i\to j)\rangle$.

Bemerkung 2.7. Im nächsten Abschnitt betrachten wir eine bestimmte Basis einer 1-quasi-erblichen Algebra. Aus der Hauptaussage dieses Abschnitts können wir bereits jetzt einen weiteren Schluss über die Relationen ziehen, nämlich: Für alle $i,j\in Q_0$ mit $i\leqslant j$ fixieren wir einen steigenden Weg $\mathrm{w}\uparrow(j\to i)$ und einen fallenden Weg $w\downarrow(i\to j)$, dann existieren für alle $j,j'\in Q_0$ und alle $k\in\Lambda_{(j)}\cap\Lambda_{(j')}$ also $\lambda_i\in K$ für alle $i\in\Lambda^{(j)}\cap\Lambda^{(j')}$ mit

$$\mathrm{w}\uparrow(k\to j')\cdot w\downarrow(j\to k)+\sum_{\substack{i\in Q_0\\ i\in\Lambda^{(j)}\cap\Lambda^{(j')}}}\lambda_i\cdot\mathrm{w}\downarrow(i\to j')\cdot\mathrm{w}\uparrow(j\to i)\in\mathrm{I}.$$

2.3 Basis $\mathrm{B}(A)$ einer 1-quasi-erblichen Algebra A

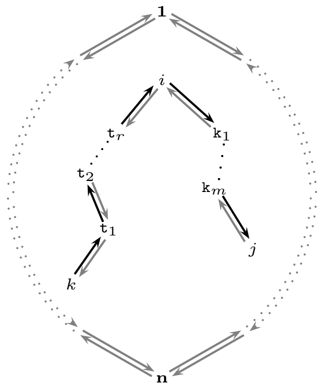
In diesem Abschnitt bestimmen wir eine spezielle Basis $\mathbf{B}(A)$ einer 1-quasi-erblichen Algebra A, deren Elemente Verknüpfungen von steigenden und fallenden Wegen sind. Wir zeigen, dass gewisse Teilmengen von $\mathbf{B}(A)$ Basen von projektiven unzerlegbaren A-Moduln bilden. Von besonderem Interesse werden einige Eigenschaften der Moduln sein, die von den Elementen dieser Basis erzeugt sind. Wir zeigen, dass gewisse Teilmengen von $\{\langle w\rangle\mid w\in\mathbf{B}(A)\}$ existieren, die mit der Halbordnungsrelation $\subseteq$ der Struktur von $(\Lambda^{(j)},\leqslant)$ bzw. $(\Lambda_{(j)},\leqslant)$ entsprechen.
Die im letzten Abschnitt eingeführten Bezeichnungen gelten auch weiterhin. In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit A ausschließlich eine 1-quasi-erbliche K-Algebra und mit (Q,I) das sie beschreibende Paar.

Sei $i\in\Lambda^{(j)}$. Für jeden steigenden bzw. fallenden Weg $\mathrm{w}\uparrow(j\to i)$ bzw. $\mathrm{w}\downarrow(i\to j)$ bezeichnen wir mit $w\uparrow(j\to i)$ bzw. $w\downarrow(i\to j)$ den dazu gehörigen Weg aus $A=KQ/\mathrm{I}$

und nennen ihn steigenden bzw. fallenden Weg in A (nach Lemma 2.5 sind es keine 0-Wege). Sei nun $i \in \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)}$ für gewisse $j, k \in Q_0$. Es existiert also ein steigender Weg von k nach i und ein fallender Weg von i nach j in A. Wir fixieren jeweils einen dieser Wege $w \uparrow (k \to i)$ sowie $w \downarrow (i \to j)$ und betrachten deren Verknüpfung. Dazu verwenden wir die Bezeichnung

$$w_i^{(j)}(k) := w \downarrow (i \to j) \cdot w \uparrow (k \to i).$$

Im rechten Bild sind diese Wege durch schwarze Pfeile visualisiert. Die Pfeile, die im Köcher zwar vorhanden sind aber hier keine Rolle spielen, sind grau.

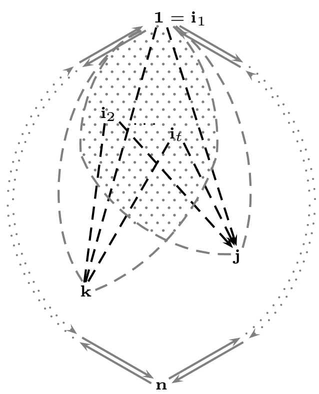


Die nun folgende Hauptaussage dieses Abschnitts besagt, dass eine Basis von A existiert, die aus Wegen der Form $w_i^{(j)}(k)$ besteht.

Satz 3.1. *Für $i, j, k \in Q_0$ mit $i \in \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)}$. Sei $w_i^{(j)}(k)$ ein oben beschriebener Weg in A. Dann bilden die Elemente der Menge*

- $\boldsymbol{B}^{(j)}(k) := \left\{ w_i^{(j)}(k) \;\middle|\; i \in \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)} \right\}$ *eine Basis von $P(k)_j$,*
- $\boldsymbol{B}(k) := \left\{ w_i^{(j)}(k) \;\middle|\; i, j \in Q_0,\ i \in \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)} \right\}$ *eine Basis von $P(k)$,*
- $\boldsymbol{B}(A) := \left\{ w_i^{(j)}(k) \;\middle|\; i, j, k \in Q_0,\ i \in \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)} \right\}$ *eine Basis von A.*

Die Elemente aus $\mathbf{B}^{(j)}(k)$ sind also Wege, die in k starten, steigend bis zu einem der Punkte i aus $\Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)}$ verlaufen, dann wiederum fallend verlaufen und im Punkt j enden.
Bild rechts: Im schattiertem Bereich befinden sich die Punkte des Köchers aus $\Lambda^{(k)} \cap \Lambda^{(j)}$, sie sind dort mit $i_1, i_2, \ldots, i_t$ bezeichnet (offensichtlich gilt $1 \in \Lambda^{(k)} \cap \Lambda^{(j)}$). Wie bereits erwähnt gilt $\left\langle w_i^{(j)}(k) \right\rangle \in \mathbf{Lok}(P(k) \mid S(j))$ und $\left\langle w_i^{(j)}(k) \right\rangle$ ist ein Untermodul von dem zu $P(i)$ isomorphen Untermodul von $P(k)$, d.h. von $\langle w \uparrow (k \to i) \rangle$.



Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir einige Zusatzaussagen zu den Wegen $w_i^{(j)}(k)$. Die Eigenschaften solcher Wege lassen sich aus der Definition einer 1-quasi-erblichen Algebra und aus bereits daraus gewonnenen Eigenschaften folgern. Wir zeigen, dass eine Filtrierung $0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_i \subset \cdots \subset U_t \subset P(k)$ von $P(k)$ existiert mit $U_i = \left\langle w_i^{(j)}(k) \right\rangle + U_{i-1}$ für alle $i \in \{i_1, \ldots, i_t\} = \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)}$ (offensichtlich gilt dann $\left\langle w_i^{(j)}(k) \right\rangle \not\subseteq U_{i-1}$). Aus der allgemeinen Vektorraum-Theorie können wir dann folgern, dass die Elemente der Menge $\left\{ w_{i_1}^{(j)}(k), w_{i_2}^{(j)}(k), \ldots, w_{i_t}^{(j)}(k) \right\}$ linear unabhängig sind. Dies werden wir nun zunächst näher betrachten.

Bemerkung 3.2. Um die Eigenschaften von $\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle$ zu beschreiben reicht es statt $w_i^{(j)}(k)$ ein Element von der Form $w_i^{(j)}(i)$ d.h. $w\downarrow(i\to j)$ zu betrachten: Aus dem Lemma 2.4 folgt $\langle w\uparrow(k\to i)\rangle=\langle w\uparrow(k'\to i)\rangle\cong P(i)$ für alle $k,k'\in\Lambda_{(i)}$, d.h. der A-Modul Homomorphismus $\langle w\uparrow(k\to i)\rangle\longrightarrow\langle w\uparrow(k'\to i)\rangle$ mit $w\uparrow(k\to i)\mapsto w\uparrow(k'\to i)$ ist ein Isomorphismus und damit sind auch $\langle a\cdot w\uparrow(k\to i)\rangle$ und $\langle a\cdot w\uparrow(k'\to i)\rangle$ für alle $a\in A$ isomorph. Da $w\downarrow(i\to j)\in A$, erhalten wir $\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle\cong\left\langle w_i^{(j)}(k')\right\rangle$. Da $i\in\Lambda_{(i)}$ gilt $\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle\cong\left\langle w_i^{(j)}(i)\right\rangle$.

Aus der Konstruktion von $w_i^{(j)}(k)$ folgt, dass $w_i^{(j)}(k)$ ein Element aus $\langle w\uparrow(k\to i)\rangle=P(i)$ ist (hier betrachten wir $P(i)$ als ein Untermodul von $P(k)$) und aus der Folgerung 2.6 erhalten wir $U\subseteq\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle$ für alle $U\in\mathbf{Lok}(P(i)\mid S(j))$.

Lemma 3.3. *Seien $i,j,k\in Q_0$ mit $i\in\Lambda^{(j)}\cap\Lambda^{(k)}$ und $P(i)\subseteq P(k)$. Für die bijektive Abbildung*

$$F:\boldsymbol{UM}\left(P(i)\,\middle|\,\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}P(i')\right)\longrightarrow\boldsymbol{UM}(\Delta(i))\quad\textit{mit}\quad F(M)=M/\left(\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}P(i')\right)$$

gilt $F^{-1}(\Delta(j))=\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle+\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}P(i')$, *d.h.* $\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle/\left(\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle\cap\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}P(i')\right)\cong\Delta(j)$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle$ kein Untermodul von $\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}P(i')$ ist. Dann gilt $\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle+\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}P(i')\in\mathbf{UM}\left(P(i)\,\middle|\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}P(i')\right)$ und damit ist

$$\begin{aligned}F\left(\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle+\textstyle\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}P(i')\right)&=\left(\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle+\textstyle\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}P(i')\right)/\left(\textstyle\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}P(i')\right)\\&\cong\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle/\left(\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle\cap\textstyle\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}P(i')\right)\end{aligned}$$

ein lokaler Untermodul von $\Delta(i)$ mit dem zu $S(j)$ isomorphen Kopf. Es existiert aber genau ein Untermodul von $\Delta(i)$ mit dieser Eigenschaft, und zwar $\Delta(j)$.
Nach der Bemerkung 3.2 sei o.B.d.A. $k=i$ und $i\neq j$. Wir betrachten den Homomorphismus $f_{w\downarrow(i\to j)}:P(j)\to P(i)$. Zu zeigen ist $\mathrm{Im}f_{w\downarrow(i\to j)}=\langle w\downarrow(i\to j)\rangle\not\subseteq\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}P(i')$, d.h. die Komposition der Abbildungen $P(j)\xrightarrow{f_{w\downarrow(i\to j)}}P(i)\twoheadrightarrow P(i)/\left(\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}P(i')\right)\cong\Delta(i)$ ist nicht trivial. Angenommen $i\lhd j$, dann gilt $(i\to j)=w\downarrow(i\to j)$. Nach der Folgerung 2.6 ist

$$\mathrm{rad}P(i)=\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}\underbrace{\langle(i\to i')\rangle}_{P(i')}+\sum_{\substack{j\in Q_0\\ i\lhd j}}\underbrace{\langle(i\to j)\rangle}_{\mathrm{Im}f_{(i\to j)}}$$

der eindeutig bestimmte reduzierte Ausdruck von $\mathrm{rad}P(i)$ und damit erhalten wir $\mathrm{Im}f_{(i\to j)}\not\subseteq\sum_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}}P(i')$. Wir erhalten $\mathrm{Im}\left(P(j)\xrightarrow{f_{(i\to j)}}P(i)\twoheadrightarrow\Delta(i)\right)\cong\Delta(j)$ und damit gilt auch $\mathrm{Ker}\left(P(j)\xrightarrow{f_{(i\to j)}}P(i)\twoheadrightarrow\Delta(i)\right)=\sum_{\substack{i\in Q_0\\ i\lhd j}}P(i)$ nach der Lemma 3.6 (Kap. 1). Anders gesagt, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P(j) & \xrightarrow{f_{(i\to j)}} & P(i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underbrace{P(j)/\sum\limits_{\substack{i\in Q_0\\ i\lhd j}} P(i)}_{=\Delta(j)} & \xrightarrow{\overline{f_{(i\to j)}}} & \underbrace{P(i)/\sum\limits_{\substack{i'\in Q_0\\ i'\lhd i}} P(i')}_{=\Delta(i)} \end{array}$$

ist kommutativ und weil der induzierte Homomorphismus $\overline{f_{w\downarrow(i\to j)}}$ von Null verschieden ist, kann es nur eine Inklusion sein.
Sei nun $w\downarrow(i\to j)=(i\to k_1\to\cdots\to k_t\to k_{t+1}\to\cdots\to k_r\to j)$, dann sind die folgenden Diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccccc} P(j) & \xrightarrow{f_{(k_r\to j)}} & P(k_r) & \xrightarrow{f_{(k_r\to k_{r-1})}} & \cdots & \longrightarrow & P(k_{t+1}) & \xrightarrow{f_{(k_t\to k_{t+1})}} & P(k_t) & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{f_{(i\to k_1)}} & P(i) \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \Delta(j) & \hookrightarrow & \Delta(k_r) & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & \Delta(k_{t+1}) & \hookrightarrow & \Delta(k_t) & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & \Delta(i) \end{array}$$

kommutativ. Für die Abbildung $f_{w\downarrow(i\to j)}=f_{(i\to k_1)}\circ\cdots\circ f_{(k_t\to k_{t+1})}\circ\cdots\circ f_{(k_r\to j)}$ gilt also $\left(P(j)\xrightarrow{f_{w\downarrow(i\to j)}}P(i)\twoheadrightarrow\Delta(i)\right)\neq 0$ und damit ist $\mathrm{Im}f_{w\downarrow(i\to j)}=\langle w\downarrow(i\to j)\rangle$ kein Untermodul von $\sum_{i'\lhd i}P(i')$. □

Nach der Definition einer 1-quasi-erblichen Algebra (Multiplizitäten-Eigenschaft) gilt: In jeder Δ-Filtrierung von $P(j)$ gibt es für jedes $i\in\Lambda^{(j)}$ genau einen Faktor, der zu $\Delta(i)$ isomorph ist. Insbesondere ist $\left|\Lambda^{(j)}\right|$ die Länge jeder Δ- Filtrierung von $P(j)$.

Lemma 3.4. *Sei $0\subset\cdots\subset D'\subset D\subset\cdots\subset P(j)$ eine Δ- Filtrierung von $P(j)$ mit $D/D'\cong\Delta(i)$, dann $D=P(i)+D'$.*

Beweis. Sei $m=\left|\Lambda^{(j)}\right|$ und $0=D_{m+1}\subset D_m\subset\cdots\subset D_{t+1}\subset D_t\subset\cdots\subset D_2\subset D_1=P(j)$ eine Δ- Filtrierung von $P(j)$ mit $D_t/D_{t+1}\cong\Delta(i_t)$ für jedes $t\in\{1,\ldots,m\}$. Daraus folgt $\mathrm{top}\,(D_t/D_{t+1})\cong\mathrm{top}\Delta(i_t)\cong S(i_t)$ und damit ist $S(i_t)$ ein direkter Summand von $\mathrm{top}D_t$. Es existiert also ein lokaler Untermodul L_t von $P(j)$ mit $\mathrm{top}L_t\cong S(i_t)$, so dass gilt $D_t=L_t+D_{t+1}$ (nicht notwendig ein reduzierter Ausdruck). Wir zeigen $L_t=P(i_t)$ durch Induktion nach t.
Für $t=1$ gilt offensichtlich $i_1=j$ und damit auch $D_1=P(i_1)=L_1$ (und auch $D(1)=L_1+D_2$).
Angenommen $L_1=P(i_1),\ldots,L_{t-1}=P(i_{t-1})$ aber $L_t\neq P(i_t)$. Dann ist L_t nach Lemma 3.4 (b) (Kap. 1) ein echter Untermodul von $P(i_t)$ und damit ist D_t ein echter Untermodul von $P(i_t)+D_{t+1}$. Es existiert also ein $k\in\{1,\ldots,t-1\}$ mit $D_{k+1}\subset P(i_t)+D_{k+1}\subset D_k$ (nach der Induktionsvoraussetzung gilt $D_k=P(i_k)+D_{k+1}$ und damit ist $D_k\neq P(i_t)+D_{k+1}$). Daraus folgt, dass $S(i_t)$ ein Kompositionsfaktor von $D_k/D_{k+1}\cong\Delta(i_k)$ ist. Aus den Multiplizitäten-Eigenschaften erhalten wir $i_k<i_t$ und damit auch $P(i_k)\subset P(i_t)$. Dies steht im Widerspruch zu $P(i_t)+D_{k+1}\subset D_k=P(i_k)+D_{k+1}$. □

Aus diesem Lemma können wir nun leicht folgern, dass jeder Untermodul in einer Δ-Filtrierung eines projektiven unzerlegbaren A-Moduls eine Summe von projektiven unzerlegbaren A-Moduln ist. Im folgenden Abschnitt werden wir zeigen, dass für jede solcher Summen U eine Δ-Filtrierung von $P(n)$ existiert, in der U vorkommt.

Folgerung 3.5. *Sei D ein Untermodul einer Δ- Filtrierung von $P(j)$, dann ist D eine Summe von in $P(j)$ enthaltenen projektiven unzerlegbaren Moduln. Insbesondere hat D genau einen reduzierten Ausdruck.*

Beweis. Sei $0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_{t-1} \subset D_t \subset D_{t+1} \subset \cdots \subset D_r = P(j)$ eine Δ-Filtrierung von $P(j)$. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach t. Da $\Delta(1) = P(1)$ ein Untermodul von $P(j)$ ist, $\Delta(1)$ in jeder Δ-Filtrierung von $P(j)$ nur einmal vorkommt und $\mathrm{soc}P(j)$ einfach ist, erhalten wir $D_1 = P(1)$. Die Aussage stimmt also für $t = 1$.
Die Aussage sei erfüllt für $D_1, \ldots, D_{t-1}$. Da $D_t/D_{t-1} \cong \Delta(i)$. Aus dem letzten Lemma folgt $D_t = P(i) + D_{t-1}$, d.h. D_t ist eine Summe von projektiven unzerlegbaren Untermoduln aus $P(j)$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $D_{t-1} = \sum_{l\in\Lambda} P(j)$ für eine Teilmenge von Λ und die Elemente in Λ sind paarweise nicht vergleichbar (Folgerung 3.5 (Kap. 1)). Da $P(i) \nsubseteq D_{t-1}$ gilt $i \nleq l$ für alle $l \in \Lambda$. Sei $\Lambda' = (\Lambda \backslash \{l \in \Lambda \mid l < i\}) \cup \{i\}$, dann sind die Elemente in Λ' paarweise nicht vergleichbar und damit ist $\sum_{l\in\Lambda'} P(l)$ ein eindeutig bestimmter reduzierter Ausdruck von D_t. $\square$

Wie bereits bekannt, gibt es in einer Jordan-Hölder-Reihe $0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_l \subset U_{l+1} \subset \cdots \subset P(k)$ von $P(k)$ genau $m = \left|\Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)}\right|$ Untermoduln $U_{t_1}, \ldots, U_{t_m}$ mit der Eigenschaft $U_{t_i}/U_{t_i-1} \cong S(j)$. Im nachfolgenden Lemma zeigen wir, dass $\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle$ für $i \in \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)}$ die Summanden jedes dieser Untermoduln sind.

Lemma 3.6. *Seien $i, j, k \in Q_0$ mit $i \in \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)}$ und $0 \subset \cdots \subset D' \subset D \subset \cdots \subset P(k)$ eine Δ-Filtrierung von $P(k)$ mit $D/D' \cong \Delta(i)$, dann existiert ein Untermodul $D_i^{(j)} \subseteq P(k)$ mit*

$$D' \subset D_i^{(j)} \subseteq D \quad \textit{und} \quad D_i^{(j)} = \left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle + D'.$$

Außerdem gilt $D_i^{(j)}/D' \cong \Delta(j)$.

Hier die Aussage in graphischer Form:

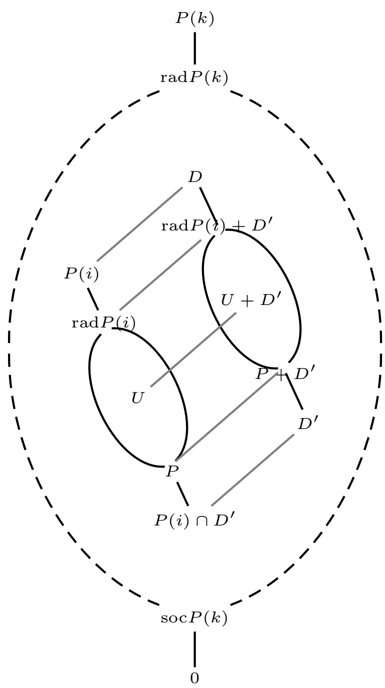
$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overbrace{\underbrace{D' \longrightarrow D_i^{(j)}}_{\Delta(j)} \longrightarrow D}^{\Delta(i)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P(k)$$

Beweis. Nach Lemma 3.4 gilt $D = P(i) + D'$. Wegen $D/D' \cong P(i)/\left(P(i) \cap D'\right) \cong \Delta(i)$ aus Lemma 3.6 (Kap. 1) folgt $P(i) \cap D' = \sum_{\substack{i'\in Q_0 \\ i' \lhd i}} P(i')$. Wir erhalten eine bijektive Abbildung

$$\mathtt{F} : \mathbf{UM}\left(P(i) \middle| \sum_{\substack{i'\in Q_0 \\ i' \lhd i}} P(i')\right) \longrightarrow \mathbf{UM}\left(D \middle| D'\right) \ \text{ mit } \ \mathtt{F}(U) = U + D'$$

Insbesondere gilt $\mathbf{UM}(D \mid D') \overset{1-1}{\leftrightarrow} \mathbf{UM}(\Delta(i))$ $(M \mapsto M/D')$.
Nach Lemma 4.2 ist $\mathtt{F}\left(\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle + \sum_{\substack{i'\in Q_0 \\ i' \lhd i}} P(i')\right) = \left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle + \sum_{\substack{i'\in Q_0 \\ i' \lhd i}} P(i') + D' = \left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle + D'$ der zu $\Delta(j) \in \mathbf{UM}(\Delta(i))$ korrespondierende Modul aus $\mathbf{UM}(D \mid D')$ (es gilt $\sum_{\substack{i'\in Q_0 \\ i' \lhd i}} P(i') \subseteq D'$). Es gilt also $\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle \nsubseteq D'$ und $D_i^{(j)} = \mathtt{F}\left(\left\langle w_i^{(j)}(k)\right\rangle + \sum_{\substack{i'\in Q_0 \\ i' \lhd i}} P(i')\right)$ ist der gesuchte Modul aus $\mathbf{UM}(D \mid D')$. $\square$

Dies ist im Bild rechts veranschaulicht: Das Bild rechts symbolisiert das Untermodul-Diagramm von $P(k)$, dabei ist $\mathrm{rad}P(k)$ der eindeutig bestimmte maximale Untermodul von $P(k)$ und $\mathrm{soc}P(k)$ ist der eindeutig bestimmte einfache Untermodul von $P(k)$. Für alle $M, M' \in \mathbf{UM}(P(k))$ mit $M' \subseteq M$ ist das Untermodul-Diagramm von $\mathbf{UM}(M \mid M')$ in dem von $P(k)$ zu finden. Im Bild sind die Unterdiagramme von $\mathbf{UM}(D \mid D')$ und $\mathbf{UM}(P(i) \mid P(i) \cap D')$ skizziert. Da diese Diagramme mit dem Untermodul-Diagramm von $\Delta(i)$ korrespondieren gibt es somit genau einen maximalen Untermodul von D bzw. $P(i)$, der D' bzw. $P(i) \cap D'$ enthält, d.h. das dem $\mathrm{rad}\Delta(i)$ entspricht (da $P(i)$ lokal ist, ist dieser Untermodul das Radikal von $P(i)$). Analog dazu gibt es genau einen Modul aus $\mathbf{UM}(D \mid D')$ bzw. $\mathbf{UM}(P(i) \mid P(i) \cap D')$ der mit $\mathrm{soc}\Delta(i)$ korrespondiert. Außerdem gibt es für jeden Modul $U \in \mathbf{UM}(P(i) \mid P(i) \cap D')$ genau einen Modul $M \in \mathbf{UM}(D \mid D')$ mit $M = U + D'$. Diese Moduln sind in dem Bild mit einer grauen Linie verbunden (im Allgemeinen ist $(U + D')/U$ kein einfacher Modul, d.h. diese Linien symbolisieren nicht unbedingt einfache Kompositionsfaktoren).



Für $\left\langle w_i^{(j)}(k) \right\rangle$ gibt es ein $U \in \mathbf{UM}(P(i) \mid P(i) \cap D')$ mit $U = \left\langle w_i^{(j)}(k) \right\rangle + P(i) \cap D'$.

Beweis des Satzes. Sei $\{i_1, \ldots, i_m\} = \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)}$ und $\mathcal{F} : 0 \subset \cdots \subset D_{i_1-1} \subset D_{i_1} \subset \cdots \subset D_{i_2-1} \subset D_{i_2} \subset \cdots \subset \cdots \subset D_{i_m-1} \subset D_{i_m} \subset \cdots \subset P(k)$ eine Δ-Filtrierung von $P(k)$ mit $D_{i_t}/D_{i_t-1} \cong \Delta(i_t)$ für alle $t \in \{1, \ldots, m\}$. Nach dem letzten Lemma kann $\mathcal{F}$ zu der folgenden "Filtrierung" verfeinert werden:

$$\begin{array}{ll} 0 \subset \cdots & \subset D_{i_1-1} \subset \left\langle w_{i_1}^{(j)}(k) \right\rangle + D_{i_1-1} \subseteq D_{i_1} \subset \\ \cdots & \subset D_{i_2-1} \subset \left\langle w_{i_2}^{(j)}(k) \right\rangle + D_{i_2-1} \subseteq D_{i_2} \subset \\ \cdots & \qquad\qquad \vdots \\ \cdots & \subset D_{i_m-1} \subset \left\langle w_{i_m}^{(j)}(k) \right\rangle + D_{i_m-1} \subseteq D_{i_m} \subset \cdots \subset P(k). \end{array}$$

Außerdem gilt $\left\langle w_{i_t}^{(j)}(k) \right\rangle \nsubseteq D_{i_t-1}$. Aus dem bereits Erwähnten erhalten wir, dass die Wege $w_{i_1}^{(j)}(k), w_{i_2}^{(j)}(k), \ldots, w_{i_m}^{(j)}(k)$ linear unabhängig sind.
Nach Lemma 3.2 (Kap. 1) gilt $\dim_K P(k)_j = m$ und damit erhalten wir, dass die Menge der Wege $\left\{ w_i^{(j)}(k) \mid i \in \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)} \right\}$ eine Basis von $P(k)_j$ ist. Aus $P(k) = \bigoplus_{j \in Q_0} P(k)_j$ folgt, dass $\left\{ w_i^{(j)}(k) \mid j \in Q_0,\ i \in \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)} \right\}$ eine Basis von $P(k)$ ist. Die Algebra A ist basisch und damit ist $\dot{\bigcup}_{k \in Q_0} \dot{\bigcup}_{j \in Q_0} \left\{ w_{k,j}^{(i)} \mid i \leqslant j, k \right\} = \left\{ w_i^{(j)}(k) \mid j, k \in Q_0,\ i \in \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)} \right\}$ eine Basis von A. $\square$

Ist also w ein beliebiger Weg aus A mit $\mathtt{s}(w) = k$ und $\mathtt{e}(w) = j$, dann existieren eindeutig bestimmte Skalare $\lambda_i \in K$ mit $w = \sum_{i \in \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)}} \lambda_i \cdot w_i^{(j)}(k)$.
Aus diesem Satz können wir in speziellen Fällen weitere Eigenschaften von $w_i^{(j)}(k)$ ableiten.

Folgerung 3.7. *Seien $i, j, k \in Q_0$ mit $i \in \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)}$. Dann ist jeder $U \in \boldsymbol{Lok}(P(k) \mid S(j))$ genau dann ein Untermodul von $\left\langle w_i^{(j)}(k) \right\rangle$, wenn $\Lambda^{(i)} = \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)}$.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Wenn jeder lokale Untermodul U von $P(k)$ mit top$U \cong S(j)$ ein Untermodul von $\left\langle w_i^{(j)}(k) \right\rangle \subseteq P(i)$ ist, dann gilt $\mathbf{Lok}(P(k) \mid S(j)) \subseteq \mathbf{Lok}(P(i) \mid S(j))$, d.h. $P(k)_j \subseteq P(i)_j$. Aus $i \leqslant k$ folgt $P(i) \subseteq P(k)$ und damit $P(i)_j \subseteq P(k)_j$. Wir erhalten also $P(k)_j = P(i)_j$ und damit $\dim_K(P(k)_j) = \dim_K(P(i)_j)$. Nach dem Satz 3.1 gilt $\left|\mathbf{B}^{(j)}(k)\right| = \left|\mathbf{B}^{(j)}(i)\right|$, d.h. $\Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)} = \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(i)} = \Lambda^{(i)}$, denn $\Lambda^{(i)} \subseteq \Lambda^{(j)}$.
" $\Leftarrow$ " Aus $\Lambda^{(i)} = \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)}$ folgt $\left|\mathbf{B}^{(j)}(k)\right| = \left|\mathbf{B}^{(j)}(i)\right|$ und damit $P(k)_j = P(i)_j$. Damit erhalten wir $\mathbf{Lok}(P(k) \mid S(j)) = \mathbf{Lok}(P(i) \mid S(j)) \subseteq \mathbf{UM}\left(\left\langle w_i^{(j)}(k) \right\rangle\right)$. □

Folgerung 3.8. *Sei $j \in Q_0$. Sind die Elemente aus $\Lambda^{(j)}$ bezüglich $\leqslant$ total geordnet, dann ist $\boldsymbol{UM}(P(j))$ endlich.*

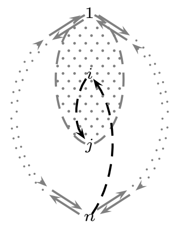
Beweis. Sei $\{i_1, \ldots, i_t, \ldots, i_m\} = \Lambda^{(j)}$ mit $i_1 < \cdots < i_t < \cdots < i_m$ (offensichtlich gilt $i_1 = 1$ und $i_m = j$). Die Menge $\Lambda^{(i_t)}$ ist dann für jedes $t \in [i, m]$ auch total geordnet. Der Beweis verläuft durch Induktion nach t.
Für $t = 1$ ist $P(i_1) = P(1) = \Delta(1)$ ein dünner Modul und damit hat $\mathbf{UM}(P(1))$ einen distributiven Verband, d.h. $\mathbf{UM}(P(1))$ ist endlich.
Angenommen $\mathbf{UM}(P(i_t))$ hat einen distributiven Verband. Das bedeutet, dass für jedes $k \in Q_0$ eine Basis $\left\{w_1^{(k)}, \ldots, w_{n_k}^{(k)}\right\}$ von $P(i_t)_k$ mit $\left\langle w_1^{(k)} \right\rangle \subset \cdots \subset \left\langle w_{n_k}^{(k)} \right\rangle$ existiert. Zu zeigen ist, dass diese Eigenschaft auch für $P(i_{t+1})_k$ erfüllt ist.
Sei $i_{t+1} \nleqslant k$, dann $\Lambda^{(i_{t+1})} \cap \Lambda^{(k)} = \Lambda^{(i)}$ für ein $i \in \{i_1, \ldots, i_t\}$. Nach 3.7 gilt damit $P(i_{t+1})_k \subseteq P(i)_k$ und aus $P(i) \subseteq P(i_{t+1})$ folgt $P(i_{t+1})_k = P(i)_k$. Nach der Induktionsvoraussetzung existiert die gesuchte Basis. Wenn $i_{t+1} \leqslant k$, dann $\Lambda^{(i_{t+1})} \cap \Lambda^{(k)} = \Lambda^{(i_{t+1})}$ und damit $U \in \left\langle w_k^{(i_{t+1})} \right\rangle$ für alle $U \in \mathbf{Lok}(P(i_{t+1}) \mid S(k))$. Weil $\{i_t\} = \left\{i \in \Lambda^{(i_{t+1})} \mid i \lhd i_{t+1}\right\}$, erhalten wir rad$P(i_{t+1}) = P(i_t)$ und damit gilt $P(i_{t+1}) = P(i_t) \oplus \operatorname{span}_K \left\{w_k^{(i_{t+1})}\right\}$.
Die Menge $\left\{w_1^{(k)}, \ldots, w_{n_t}^{(k)}, w_k^{(i_{t+1})}\right\}$ ist die gesuchte Basis von $P(i_{t+1})_k$. □

Für jeden Nachbarn i von 1 hat $P(i)$ also endlich viele Untermoduln. Dies wurde im Lemma 4.3 (Kap. 1) gezeigt.

Basis $\mathbf{B}(n)$ von $P(n)$

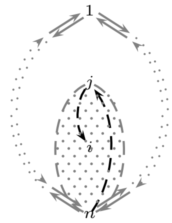
Sei n das maximale Element in dem Köcher Q einer 1-quasi-erblichen Algebra $(A, \leqslant)$ $(n = |Q_0|)$. Um die Eigenschaften der Elemente aus $\mathbf{B}(A)$ und der von ihnen erzeugten Moduln zu beschreiben, reicht es, die Basis $\mathbf{B}(n)$ zu betrachten: Jedes Element aus $\mathbf{B}(A)$ gehört zu einem projektiven unzerlegbaren A-Modul und aus $P(k) \hookrightarrow P(n)$ folgt, dass ein von $w_i^{(j)}(k)$ erzeugter Untermodul von $P(k)$ ein Untermodul von $P(n)$ ist. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts betrachten wir die Elemente von $\mathbf{B}(n)$, somit unterlassen wir es, den Index n explizit zu nennen. Wir verwenden also $w_i^{(j)}$ statt $w_i^{(j)}(n)$, $\mathbf{B}^{(j)}$ statt $\mathbf{B}^{(j)}(n)$ und $\mathbf{B}$ statt $\mathbf{B}(n)$. Die Basis $\mathbf{B}$ ist offensichtlich eine disjunkte Vereinigung von $\mathbf{B}^{(j)}$.

$\mathbf{B}^{(j)}$ besteht also aus den Wegen von A, die in n starten, bis zu einem der Punkte $i \in \Lambda^{(j)}$ steigen und dann fallend enden im Punkt j.
Im Bild rechts sehen wir den Köcher von A. Im punktierten Bereich befinden sich die Elemente der Menge $\Lambda^{(j)}$ und der dort gezeichnete Weg ist ein Weg aus $\mathbf{B}^{(j)}$. Die Elemente aus $\mathbf{B}^{(j)}$ sind also Elemente von $\mathbf{B}$ mit dem Kopfindex j.



Die Elemente in $\mathbf{B}$ sind auch anders *sortierbar*:

Bezeichnen wir mit $B_{(j)}$ alle Wege aus $\mathbf{B}$, die in n starten, steigend verlaufen bis zu dem Punkt j und dann fallend in einem der Punkte $i \in \Lambda_{(j)}$ enden, d.h. $B_{(j)} := \left\{ w_i^{(j)} \mid i \in \Lambda_{(j)} \right\}$, so erhalten wir $\mathbf{B}$ als eine disjunkte Vereinigung von $B_{(j)}$. Die Elemente aus $B_{(j)}$ sind also Elemente von $\mathbf{B}$ mit dem Fußindex j. Die analoge Visualisierung der Wege aus $B_{(j)}$ sehen wir im Bild rechts. In dem punktierten Bereich befinden sich nun die Elemente aus $\Lambda_{(j)}$.



Nun zeigen wir, dass sich auf den Mengen $\mathbf{B}^{(j)}$ bzw. $B_{(j)}$ Halbordnungsrelationen definieren lassen ($w \prec w'$ genau dann, wenn $\langle w \rangle \subset \langle w' \rangle$), die mit $\left(\Lambda^{(j)}, \leqslant\right)$ bzw. $\left(\Lambda_{(j)}, \leqslant\right)$ übereinstimmen.

Lemma 3.9. *Für alle $i, i', j, j' \in Q_0$ ist Folgendes erfüllt:*

(a) $\left\langle w_{i'}^{(j)} \right\rangle \subset \left\langle w_i^{(j)} \right\rangle$ *genau dann, wenn $i' < i$.*

(b) $\left\langle w_i^{(j')} \right\rangle \subset \left\langle w_i^{(j)} \right\rangle$ *genau dann, wenn $j < j'$.*

Beweis. Offensichtlich gilt $\Lambda^{(i)} = \left\{ \Lambda^{(i)} \cap \Lambda^{(n)} \right\}$, damit gilt nach der Folgerung 3.7 für jedes $j \in \Lambda_{(i)}$ und für jeden $U \in \mathbf{Lok}\,(P(i) \mid S(j)) = \{\langle w \rangle \mid w \in P(i)_j\}$ also $U \subseteq \left\langle w_i^{(j)} \right\rangle$.
Nach dem Satz 3.1 gilt $P(i)_j = \operatorname{span}_K \left\{ w_{i'}^{(j)} \mid i' \in \Lambda^{(i)} \right\}$ und für $i \neq i'$ gilt $\left\langle w_{i'}^{(j)} \right\rangle \neq \left\langle w_i^{(j)} \right\rangle$, denn $\left\langle w_i^{(j)} \right\rangle \not\subseteq P(i')$. Daraus folgt die Aussage (a).
(b)" $\Leftarrow$ " Da $j < j'$, existiert ein fallender Weg $w \downarrow (j \to j')$ in A und damit ist $w \downarrow (j \to j') \cdot w_i^{(j)}$ ein Weg in A von der Form $w_i^{(j')}(n)$. Nach der Bemerkung 3.2 gilt damit $\left\langle w \downarrow (j \to j') \cdot w_i^{(j)} \right\rangle = \left\langle w_i^{(j')} \right\rangle$. Da $w \downarrow (j \to j')$ nicht invertierbar ist, erhalten wir $\left\langle w_i^{(j')} \right\rangle \subset \left\langle w_i^{(j)} \right\rangle$.
" $\Rightarrow$ " Wenn $j \nless j'$ dann existiert kein $a \in A$, so dass $a \cdot w_i^{(j)}$ von der Form $w_i^{(j')}(n)$ ist. Somit ist $a \cdot w_i^{(j)} \neq w_i^{(j')}$ für alle $a \in A$ und damit $\left\langle w_i^{(j')} \right\rangle \not\subset \left\langle w_i^{(j)} \right\rangle$. $\square$

Wir erhalten also, dass auf $\mathbf{B}^{(j)}$ eine Halbordnung definiert werden kann, die mit der auf $\Lambda^{(j)}$ übereinstimmt: Für $i, i' \in \Lambda^{(j)}$ gilt

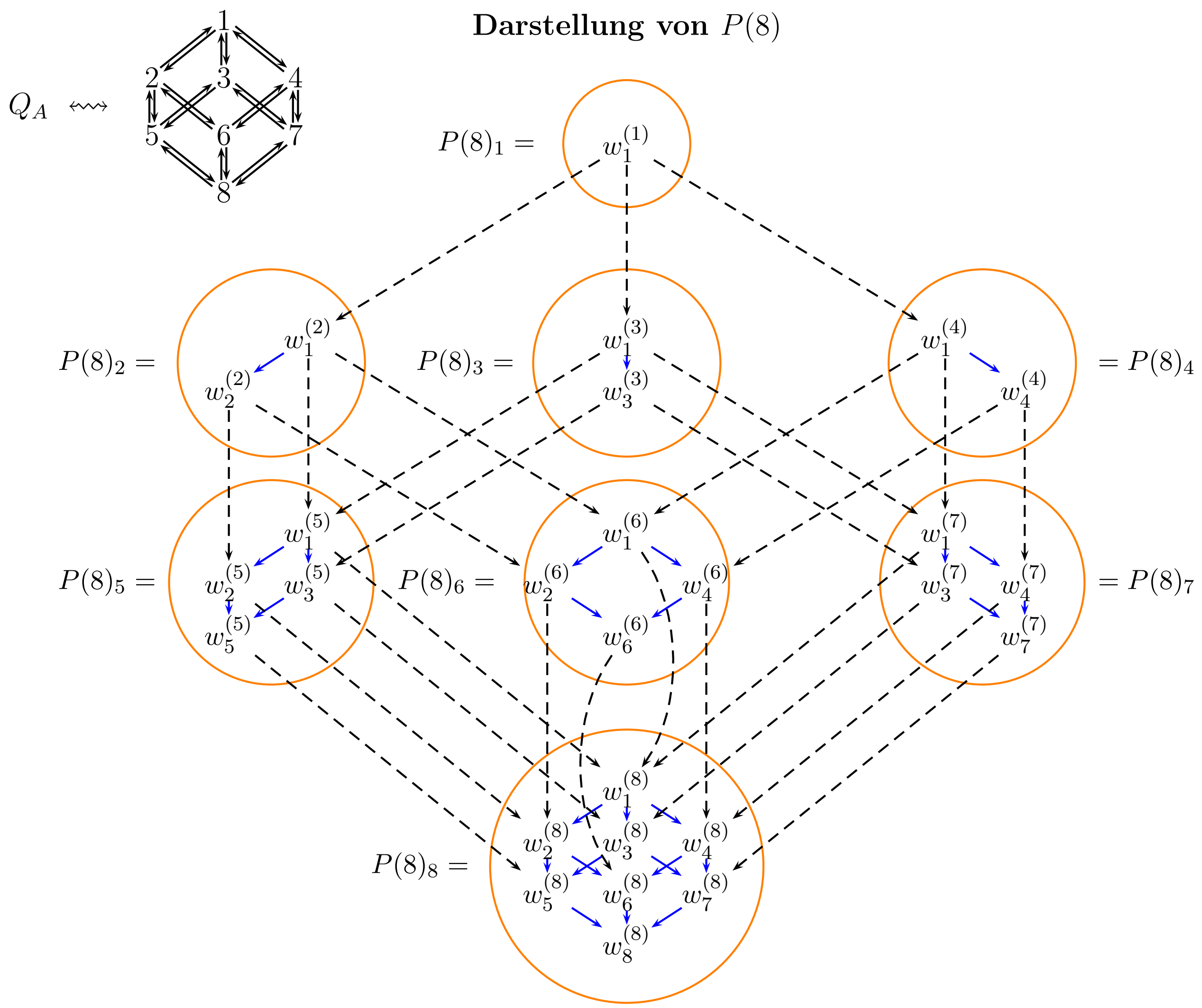
$$w_i^{(j)} < w_{i'}^{(j)} \;\Leftrightarrow\; \left\langle w_{i'}^{(j)} \right\rangle \subset \left\langle w_i^{(j)} \right\rangle \;\Leftrightarrow\; i' < i.$$

Analog dazu wird eine Halbordnung auf $B_{(j)}$ definiert, die mit der Halbordnung auf $\Lambda_{(j)}$ korrespondiert:

$$w_i^{(j')} < w_i^{(j)} \;\Leftrightarrow\; \left\langle w_i^{(j')}\right\rangle \subset \left\langle w_i^{(j)}\right\rangle \;\Leftrightarrow\; j < j'.$$

Diese Beziehungen (der Halbordnungen) können in der Darstellung von $P(n)$ auf folgende Weise verdeutlicht werden: Die Vektorräume $P(n)_j$ präsentieren wir als Kreise, die entsprechend den Punkten aus Q_0 räumlich angeordnet sind. In dem j-ten Kreis befindet sich dass Hasse-Diagramm von $\left(\mathbf{B}^{(j)}, \leqslant\right)$, dabei sind die $w_i^{(j)}, w_{i'}^{(j)} \in \mathbf{B}^{(j)}$ mit einem Pfeil $w_{i'}^{(j)} \to w_{i'}^{(j)}$ verbunden, wenn $\left\langle w_{i'}^{(j)}\right\rangle \subset \left\langle w_{i'}^{(j)}\right\rangle$ und kein $w \in \mathbf{B}^{(j)}$ mit $\left\langle w_{i'}^{(j)}\right\rangle \subset \langle w\rangle \subset \left\langle w_{i'}^{(j)}\right\rangle$ existiert. Das letzte Lemma zeigt, dass das Muster der Verbindungen von Elementen aus $\mathbf{B}^{(n)}$ den Verbindungen von Punkten in $\Lambda^{(j)}$ entspricht. Somit kann der j-te Kreis als lineare Hülle von den Elementen aus $\mathbf{B}^{(j)}$ verstanden werden. Analog zu der letzten Beschreibung verbinden wir die Elemente aus $B_{(j)}$. Diese Verbindungen korrespondieren mit den Verbindungen der Punkte in $\Lambda_{(j)}$. Hier ist anzumerken, dass diese Veranschaulichung nur von der Struktur des Köchers von A abhängt.

Beispiel 3.10. Sei A die im Beispiel V (Unterabschnitt 1.2.2) beschriebene 1-quasi-erbliche Algebra. Die Pfeile, die die Elemente aus $\mathbf{B}^{(j)}$ verbinden, sind blau und durch die gestrichelten Pfeile sind die Elemente aus $B_{(j)}$ verbunden.



Bemerkung 3.11. Betrachten wir alle projektiven unzerlegbaren A-Moduln als Untermoduln von $P(n)$, so erhalten wir, dass gewisse lineare Kombinationen aus den Elementen in $\mathbf{B}$ eine Basis von $P(k)$ für jedes $k \in Q_0$ liefern. Aus dem Satz 3.1 für $B_{(j)} = \left\{ w_i^{(j)} \mid i \in \Lambda_{(j)} \right\}$ folgt, dass für jedes $k \in Q_0$ die Menge

$$\dot{\bigcup_{j \in \Lambda^{(k)}}} B_{(j)} = \left\{ w_i^{(j)} \mid i, j \in Q_0,\ i \in \Lambda^{(j)} \cap \Lambda^{(k)} \right\}$$

eine Basis von $P(k)$ bildet.

Lemma 3.12. *Seien $k, k' \in Q_0$, dann gilt*

$$P(k) \cap P(k') = \sum_{j \in \Lambda^{(k)} \cap \Lambda^{(k')}} P(j)$$

Beweis. "$\subseteq$". Sei $u \in P(k) \cap P(k')$, dann nach der Bemerkung 3.11 ist u eine Linearkombination von den Elementen aus $\left(\dot{\bigcup}_{j \in \Lambda^{(k)}} B_{(j)}\right)$ und den Elementen aus $\left(\dot{\bigcup}_{j \in \Lambda^{(k')}} B_{(j)}\right)$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Ausdrucks folgt, dass u eine Linearkombination von den Elementen aus $\dot{\bigcup}_{j \in \Lambda^{(k)} \cap \Lambda^{(k')}} B_{(j)}$ ist. Da jedes Element aus $\dot{\bigcup}_{j \in \Lambda^{(k)} \cap \Lambda^{(k')}} B_{(j)}$ in $\sum_{j \in \Lambda^{(k)} \cap \Lambda^{(k')}} P(j)$ enthalten ist, erhalten wir $P(k) \cap P(k') \subseteq \sum_{j \in \Lambda^{(k)} \cap \Lambda^{(k')}} P(j)$.
"$\supseteq$". Für jedes $j \in \Lambda^{(k)} \cap \Lambda^{(k')}$ ist $P(j)$ ein Untermodul von $P(k)$ und $P(k')$ nach Lemma 3.4 (Kap. 1). Daraus folgt $\sum_{j \in \Lambda^{(k)} \cap \Lambda^{(k')}} P(j) \subseteq P(k) \cap P(k')$. $\square$

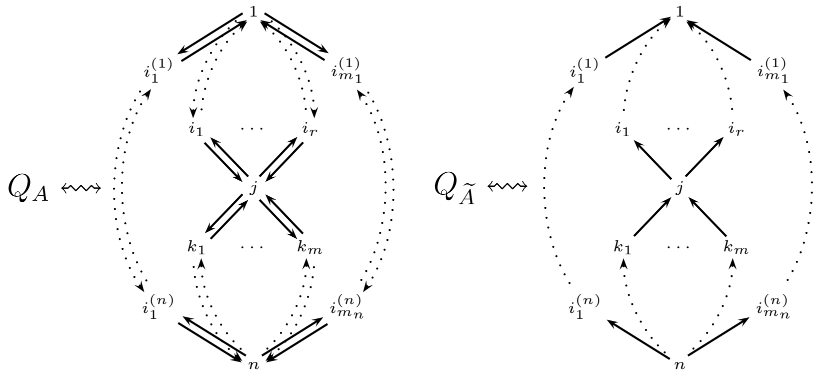
2.4 Δ- bzw. ∇-Filtrierungen von $P(j)$

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass sich aus den bereits gewonnenen Eigenschaften einer 1-quasi-erblichen Algebra A alle Δ- bzw. ∇-Filtrierungen von projektiven bzw. injektiven unzerlegbaren A-Moduln bestimmen lassen. Als Hilfsmittel definieren wir eine Algebra $\widetilde{A}$ und zeigen, dass Jordan-Hölder-Reihen von projektiven unzerlegbaren $\widetilde{A}$-Moduln in einem direkten Zusammenhang mit Δ- bzw ∇-Filtrierungen von projektiven bzw. injektiven unzerlegbaren A-Moduln stehen.
Dadurch wird sich zeigen, dass die Δ- bzw. ∇-Filtrierungen von projektiven bzw. injektiven unzerlegbaren A-Moduln nur von der Struktur des Köchers abhängen, d.h. sind $A = KQ/\mathrm{I}$ und $A' = KQ/\mathrm{I}'$ zwei 1-quasi-erblichen (nicht unbedingt isomorphe) Algebren, dann haben die Diagramme von Δ- bzw. ∇-Filtrierungen von $P_A(j)$ und $P_{A'}(j)$ bzw. von $I_A(j)$ und $I_{A'}(j)$ die gleiche Struktur für alle $j \in Q_0$.

Die Algebra $\widetilde{A}$. Für eine 1-quasi-erbliche Algebra A bezeichnen wir mit $\widetilde{A}$ die Algebra, die wie folgt definiert wird: Wenn $A = KQ/\mathrm{I}$, dann $\widetilde{A} = K\widetilde{Q}/\widetilde{\mathrm{I}}$, wobei

- $\widetilde{Q}_0 = Q_0$ und die Halbordnung $\leqslant$ auf Q_0 behält auf $\widetilde{Q}_0$ ihre Relevanz,
- $\widetilde{Q}_1 = \{j \to i \mid i, j \in Q_0,\ \ i \lhd j\}$,
- $\widetilde{\mathrm{I}}$ ist das von allen kommutativen Relationen erzeugte Ideal.

Bemerkung 4.1. Ist die Algebra $\widetilde{A}$ eine Unteralgebra von A, d.h. für alle $i, j \in Q_0$ mit $i \leqslant j$ und alle $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathrm{W} \uparrow (j \to i)$ gilt $w_1 = w_2$ in A, dann ist $\widetilde{A}$ eine Borel-Unteralgebra von A. Die Definition von Borel-Unteralgebra und ergänzende Informationen sind in [K1], [K2], [M1] zu finden.



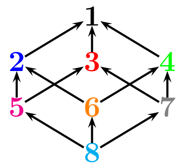
Genauer: Der Köcher von $\widetilde{A}$ entsteht aus dem Köcher von A, indem die Pfeile $i \to j$ mit $i \lhd j$ eliminiert werden. Somit existiert für $i, j \in Q_0$ genau dann ein Weg in $K\widetilde{Q}$, wenn $i \leqslant j$. Für die Wege $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_1$ aus $K\widetilde{Q}$ mit $\mathtt{s}(\mathrm{w}_1) = \mathtt{s}(\mathrm{w}_2)$ und $\mathtt{e}(\mathrm{w}_1) = \mathtt{e}(\mathrm{w}_2)$ gilt $\mathrm{w}_1 - \mathrm{w}_2 \in \widetilde{\mathrm{I}}$, d.h. es gibt einen eindeutig bestimten Weg w in $\widetilde{A}$ mit $\mathtt{s}(w) = j$, $\mathtt{e}(w) = i$.
Diesen Weg bezeichnen wir mit w_{ij}. Die Bezeichnungen für $\Lambda^{(j)}, \Lambda_{(j)}$ hängen nur von $(Q_0, \leqslant)$ ab, damit behalten sie auch für die Algebra $\widetilde{A}$ weiterhin ihre Bedeutung.

Bemerkung 4.2. Die Algebra $\widetilde{A}$ hängt offensichtlich nur von dem Köcher der Algebra A ab. Die Köcher von A und A^{op} stimmen überein. Damit erhalten wir $\widetilde{A} = \widetilde{A^{op}}$.

Aus der Definition von $\widetilde{A}$ erhalten wir $P_{\widetilde{A}}(j)_i = \begin{cases} \mathrm{span}_K \{w_{ij}\} & \text{wenn } i \leqslant j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und damit $\mathrm{Hom}_{\widetilde{A}}(P_{\widetilde{A}}(i), P_{\widetilde{A}}(j)) = \begin{cases} \mathrm{span}_K \left\{ f_{w_{ij}} : P_{\widetilde{A}}(i) \hookrightarrow P_{\widetilde{A}}(j) \right\} & \text{wenn } i \leqslant j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Daraus folgt also $\mathbf{Lok}\left(P_{\widetilde{A}}(j) \mid S_{\widetilde{A}}(i)\right) = \begin{cases} \{P_{\widetilde{A}}(i)\} & \text{wenn } i \leqslant j, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$ und damit ist jeder Untermodul von $P_{\widetilde{A}}(j)$ eine Summe von gewissen projektiven unzerlegbaren $\widetilde{A}$-Moduln die zu den Punkten aus $\Lambda^{(j)}$ korrespondieren. Insbesondere gilt $[P_{\widetilde{A}}(j) : S(i)] = 0$ für alle $i \in \widetilde{Q}_0$ mit $j < i$ und damit ist $P_{\widetilde{A}}(j)/\mathrm{rad}P_{\widetilde{A}}(j)$ der einzige Faktormodul von $P_{\widetilde{A}}(j)$, so dass für seinen Kompositionsfaktor $S(i)$ die Eigenschaft $j \leqslant i$ gilt, d.h. $\Delta_{\widetilde{A}}(j) \cong \mathrm{top}P(j) \cong S_{\widetilde{A}}(j)$. Damit sind die einfachen $\widetilde{A}$-Moduln die Standardmoduln. Alle $\widetilde{A}$-Moduln besitzen somit eine Δ-Filtrierung und damit ist $\widetilde{A}$ quasi-erblich mit mod-$\widetilde{A} = \mathfrak{F}(\Delta)$.
Für die injektiven unzerlegbaren $\widetilde{A}$-Moduln erhalten wir Folgendes: $I_{\widetilde{A}}(j)_i = \mathrm{span}_K \{w_{ij}\}$ für alle $i \in \Lambda_{(j)}$ und $I_{\widetilde{A}}(j)_i = 0$ für alle $i \in Q_0 \backslash \Lambda_{(j)}$. Insbesondere gilt $[I_{\widetilde{A}}(j) : S_{\widetilde{A}}(i)] = 0$ und damit gilt $\mathrm{Hom}_{\widetilde{A}}((I(j), I(i))) = 0$ für alle $i \leqslant j$. Daraus folgt $\nabla_{\widetilde{A}}(j) = I_{\widetilde{A}}(j)$. Da $I_{\widetilde{A}}(j)$ ein unzerlegbarer $\widetilde{A}$-Modul aus $\mathfrak{F}(\Delta) \cap \mathfrak{F}(\nabla)$ ist und jede $\Delta_{\widetilde{A}}$-Filtrierung mit $\Delta_{\widetilde{A}}(j)$ beginnt sowie jede $\nabla_{\widetilde{A}}$-Filtrierung mit $\nabla_{\widetilde{A}}$ endet, erhalten wir $I_{\widetilde{A}}(j) = T_{\widetilde{A}}(j)$. Es gilt also $\mathfrak{F}(\Delta) \cap \mathfrak{F}(\nabla) = \mathrm{add}\left\{ I_{\widetilde{A}}(j) \mid j \in Q_0 \right\}$ und $\bigoplus_{j \in Q_0} I_{\widetilde{A}}(j)$ ist der charakteristische Kippmodul von $\widetilde{A}$.
Jeder Untermodul U von $P_{\widetilde{A}}(j)$ ist eine Summe von gewissen projektiven unzerlegbaren $\widetilde{A}$-Moduln aus $P_{\widetilde{A}}(j)$ d.h. $\mathbf{UM}(P_{\widetilde{A}}(j)) = \left\{ \sum_{i \in \Lambda} P_{\widetilde{A}}(i) \mid \Lambda \subseteq \Lambda^{(j)} \right\}$. Es existiert also eine Teilmenge $\Lambda_U \in \Lambda^{(j)}$ mit $U = \sum_{i \in \Lambda_U} P_{\widetilde{A}}(i)$. Aufgrund der letzten Eigenschaft genügt es, nur die maximalen Elemente von Λ_U zu verwenden, deswegen (o.B.d.A.) seien die Elemente in Λ_U paarweise unvergleichbar, d.h. Λ_U ist eindeutig bestimmt. Nach den Erläuterungen aus dem Abschnitt 1.1.1 (Kap. 1) hat U damit $|\Lambda_U|$ maximale Un-

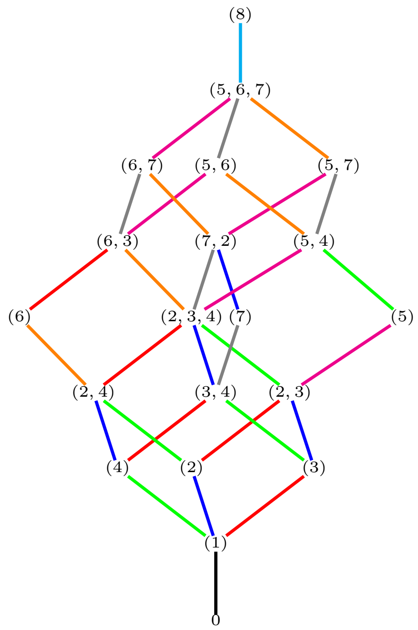
termoduln, nämlich $\left\{\mathrm{rad}P(i') + \sum_{i\in\Lambda_U\setminus\{i'\}} P(i) \mid i' \in \Lambda_U\right\}$ und $\mathrm{top}U \cong \bigoplus_{i\in\Lambda_U} S(i)$. Da $\mathrm{rad}P(i') = \sum_{i\in\Lambda_{\mathrm{rad}P(i')}} P(i)$, gilt damit $\mathrm{rad}P(i') + \sum_{\substack{i\in\Lambda_U\\ i'\neq i}} P(i) = \sum_{i\in\Lambda_{\mathrm{rad}P(i')}\cup\Lambda_U\setminus\{i'\}} P(i)$. Wählen wir aus $\Lambda_{\mathrm{rad}P(i')} \cup \Lambda_U \setminus \{i'\}$ die maximalen Elemente aus, so erhalten wir die Teilmenge Λ_M für $M = \mathrm{rad}P(i') + \sum_{i\in\Lambda_U\setminus\{i'\}} P(i)$.

Beispiel 4.3. Sei A die in dem Beispiel V (aus 1.2.2 Kap. 1) gegebene 1-quasi-erbliche Algebra. Die Algebra $\widetilde{A}$ ist durch den folgenden Köcher und Relationen dargestellt.

$Q_{\widetilde{A}} \rightsquigarrow$ 

$$\Im = \left\{ \begin{array}{ccc} 521 & = & 531 \\ 621 & = & 641 \\ 731 & = & 741 \\ 852 & = & 862 \\ 853 & = & 873 \\ 864 & = & 874 \end{array} \right\}$$

Das Radikal von $P(8)$ ist $\sum_{i\in Q_0\setminus\{8\}} P(i)$, die maximalen Elemente der Menge $Q_0\setminus\{8\}$ sind $5, 6, 7$, d.h. $\Lambda_{\mathrm{rad}P(8)} = \{5, 6, 7\}$. Das Radikal von $P(8)$ hat also genau 3 maximale Untermoduln $M_1 = \mathrm{rad}P(5) + P(6) + P(7)$, $M_2 = \mathrm{rad}P(6) + P(5) + P(7)$ und $M_3 = \mathrm{rad}P(7) + P(5) + P(6)$. Aus dem Punkt 5 starten genau zwei Pfeile. Sie enden in den Punkten 2 und 3 und damit gilt $\mathrm{rad}P(5) = P(2) + P(3)$. Die Menge Λ_{M_1} besteht aus den maximalen Elementen der Menge $\{2, 3, 6, 7\}$, d.h. $\Lambda_{M_1} = \{6, 7\}$ und damit hat M_1 zwei maximale Untermoduln $M_{11} = \mathrm{rad}P(6) + P(7)$ und $M_{12} = \mathrm{rad}P(7) + P(6)$. Nach der gleichen Prozedur erhalten wir $\Lambda_{M_{11}} = \{2, 7\}$ und $\Lambda_{12} = \{3, 6\}$. Analog dazu können wir die maximalen Untermoduln von M_{11}, M_{12}, M_2, M_3 und auch deren maximale Untermoduln bestimmen, ebenso die zu diesen Moduln gehörenden Teilmengen aus Q_0.
Das Bild rechts zeigt den Untermodulverband von $P_{\widetilde{A}}(8)$. Die Zahlensequenz $(i_1, \ldots, i_t)$ steht für den Modul $P_{\widetilde{A}}(i_1) + \cdots + P_{\widetilde{A}}(i_t)$.



Totale Ordnungen auf $\Lambda^{(j)}$. Sei $j \in Q_0$. Auf $\Lambda^{(j)}$ definieren wir eine totale Ordnung $\preccurlyeq$, die in folgender Weise mit der *Original*-Halbordnung $\leqslant$ verträglich ist: Für $i, i' \in \Lambda^{(j)}$ gilt $i' \prec i$ genau dann, wenn $i \ngeqslant i'$ (die Ordnung $\preccurlyeq$ ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn $\leqslant$ eine totale Ordnung ist, in diesem Fall stimmen die beiden Ordnungen überein ($\leqslant=\preccurlyeq$)). Für eine derartige totale Ordnung $\preccurlyeq$ gibt es genau ein m-Tupel $(i_1, \ldots, i_m)$ aus den Elementen von $\Lambda^{(j)}$ mit $i_1 \prec i_2 \prec \cdots, \prec i_m$ (hier $m = \left|\Lambda^{(j)}\right|$). Offensichtlich gilt $i_1 = 1$ und $i_m = j$. Die Menge solcher Tupel bezeichnen wir mit $\mathcal{T}(j)$.
Aus dem letzten Beispiel erhalten wir, dass für $j = 1, 2, 3, 4$ genau eine von solchen totalen Ordnungen existiert. Für für $j = 5$ gibt es genau zwei solcher Ordnungen, d.h. $\mathcal{T}(5) = \{(1, 2, 5),\ (1, 3, 5)\}$. Analog dazu gibt es genau zwei Ordnungen im $\mathcal{T}(6)$ und $\mathcal{T}(7)$. Für $j = 8$ besteht die Menge $\mathcal{T}(8)$ aus genau 48 Elementen, sie sind:

$$\begin{array}{lllllllll}
(1, & i_{\sigma(1)}, & i_{\sigma(2)}, & i_{\sigma(3)}, & j_{\tau(1)}, & j_{\tau(2)}, & j_{\tau(3)}, & 8) & \text{hier } (i_1, i_2, i_3) = (2, 3, 4) \text{ und } (j_1, j_2, j_3) = (5, 6, 7), \\
(1, & i_{\tilde\sigma(1)}, & i_{\tilde\sigma(2)}, & 5, & 4, & j_{\tilde\tau(1)}, & j_{\tilde\tau(2)}, & 8) & \text{hier } (i_1, i_2) = (2, 3) \text{ und } (j_1, j_2) = (6, 7), \\
(1, & i_{\tilde\sigma(1)}, & i_{\tilde\sigma(2)}, & 6, & 3, & j_{\tilde\tau(1)}, & j_{\tilde\tau(2)}, & 8) & \text{hier } (i_1, i_2) = (2, 4) \text{ und } (j_1, j_2) = (5, 7), \\
(1, & i_{\tilde\sigma(1)}, & i_{\tilde\sigma(2)}, & 7, & 2, & j_{\tilde\tau(1)}, & j_{\tilde\tau(2)}, & 8) & \text{hier } (i_1, i_2) = (3, 4) \text{ und } (j_1, j_2) = (5, 7),
\end{array}$$

wobei $\sigma, \tau \in \mathrm{Sym}(3)$, d.h. in der ersten Zeile ergeben sich 36 Möglichkeiten und jeweils 4 Möglichkeiten in den restlichen drei Zeilen, wobei $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau} \in \mathrm{Sym}(2)$.

Sei $(i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{T}(j)$ und $U_t := \sum_{k=1}^{t} P_{\widetilde{A}}(i_k)$ für jedes $t \in [1, m]$, d.h. $U_t = P_{\widetilde{A}}(i_t) + U_{t-1}$. Da $i_t \not\succcurlyeq i_k$ für alle $k \in [1, t-1]$ gilt $P_{\widetilde{A}}(i_t) \not\subseteq U_{t-1}$ und damit gilt $U_{t-1} \subset U_t$. Außerdem gilt $U_t/U_{t-1} \cong P_{\widetilde{A}}(i_t)/\left(P_{\widetilde{A}}(i_t) \cap U_{t-1}\right) \cong S(i_t)$, denn aus der Definition von $(i_1, \dots, i_m)$ folgt $i \in \{i_1, \dots, i_{t-1}\}$ für jedes $i \in Q_0$ mit $i < j$, d.h. $\mathrm{rad} P_{\widetilde{A}}(j) = \sum_{i \in \Lambda^{(j)} \setminus \{j\}} P_{\widetilde{A}}(i) \subseteq U_{t-1}$ und damit gilt $P_{\widetilde{A}}(j) \cap U_{t-1} = \mathrm{rad} P_{\widetilde{A}}(j)$. Wir erhalten also, dass $0 = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_t \subset \cdots \subset U_m = P_{\widetilde{A}}(j)$ eine Jordan-Hölder-Filtrierung von $P_{\widetilde{A}}(j)$ ist. Diese Filtrierung bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_j(i_1, \dots, i_m)$.

Wir ordnen nun dem Tupel $(i_1, \dots, i_m)$ aus $\mathcal{T}(j)$ eine Filtrierung von dem A-Modul $P(j)$ zu: Sei $D_t := \sum_{k=1}^{t} P_A(i_k)$ für jedes $t \in [1, m]$. Dann erhalten wir $D_t = P_A(i_t) + D_{t-1}$ und damit $D_t/D_{t-1} = \left(P_A(i_t) + D_{t-1}\right)/D_{t-1} \cong P_A(i_t)/\left(P_A(i_t) \cap D_{t-1}\right) \cong \Delta(i_t)$ für alle $t \in [1, m]$. Dies folgt aus der Eigenschaft von $P_A(i_t) \cap \left(\sum_{k=1}^{t-1} P_A(i_k)\right) = \sum_{\substack{i \in Q_0 \\ i \lhd i_t}} P(i)$ (Lemma 3.12), denn alle $i \in Q_0$ mit $i \in \Lambda^{(i_t)}$ sind in $\{i_1, \dots, i_t\}$. Die Filtrierung $0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_t \subset \cdots \subset D_m = P_A(j)$ ist somit eine Δ-Filtrierung von $P_A(j)$, die wir mit $\mathcal{F}_j(\Delta)(i_1, \dots, i_m)$ bezeichnen.
Für ein $j \in Q_0$ bezeichnen wir $\mathcal{K}(i) := \mathrm{Ker}(P(n) \twoheadrightarrow I(i))$ und für jedes $t \in [1, m]$ sei $N_t := \left(\bigcap_{k=1}^{t} \mathcal{K}(i_k)\right)/\mathcal{K}(j)$, dann ist $0 = N_m \subset N_{m-1} \subset \cdots \subset N_t \subset \cdots \subset N_1 \subset N_0 = I_A(j)$ eine ∇-Filtrierung von $I_A(j)$. Dies erhalten wir aus den Eigenschaften der Dualität. Diese Filtrierung bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_j(\nabla)(i_1, \dots, i_m)$.

Aus diesen Erläuterungen erhalten wir nun eine Korrespondenz zwischen $\mathcal{T}(j)$ und Jordan-Hölder-Reihen von $P_{\widetilde{A}}(j)$, zwischen $\mathcal{T}(j)$ und Δ-Filtrierungen von $P_A(j)$ sowie zwischen $\mathcal{T}(j)$ und ∇-Filtrierungen von $I_A(j)$.

Lemma 4.4. *Sei $j \in Q_0$ und $m = \left|\Lambda^{(j)}\right|$. Folgende Abbildungen sind bijektiv:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}(j) & \xrightarrow{H_1} & \{\mathfrak{F} \mid \mathfrak{F} \text{ ist eine Jordan-Hölder-Reihe von } P_{\widetilde{A}}(j)\} \\ (i_1, \dots, i_m) & \mapsto & \mathcal{F}_j(i_1, \dots, i_m) : \ 0 = U_0 \subset \cdots \subset U_{t-1} \subset U_t \subset \cdots \subset U_m = P(j), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}(j) & \xrightarrow{H_2} & \{\mathfrak{F} \mid \mathfrak{F} \text{ ist eine } \Delta\text{-Filtrierung von } P_A(j)\} \\ (i_1, \dots, i_m) & \mapsto & \mathcal{F}_j(\Delta)(i_1, \dots, i_m) : \ 0 = D_0 \subset \cdots \subset D_{t-1} \subset D_t \subset \cdots \subset D_m = P_A(j), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}(j) & \xrightarrow{H_3} & \{\mathfrak{F} \mid \mathfrak{F} \text{ ist eine } \nabla\text{-Filtrierung von } I_A(j)\} \\ (i_1, \dots, i_m) & \mapsto & \mathcal{F}_j(\nabla)(i_1, \dots, i_m) : \ 0 = N_m \subset N_{m-1} \subset \cdots \subset N_t \subset \cdots \subset N_0 = I_A(j). \end{array}$$

Außerdem gilt $U_t/U_{t-1} \cong S_{\widetilde{A}}(i_t)$, $D_t/D_{t-1} \cong \Delta_A(i_t)$ und $N_t/N_{t+1} \cong \nabla_A(i_t)$ für alle $t \in [1, m]$.

Beweis. Die Abbildungen H_1, H_2, H_3 sind injektiv, denn für $\sigma, \tau \in \mathcal{T}(j)$ erhalten wir $H_i(\sigma) \neq H_i(\tau)$ für $i = 1, 2, 3$. Es reicht also zu zeigen, dass diese Abbildungen surjektiv sind. Sei $0 = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_{t-1} \subset U_t \subset \cdots \subset P_{\widetilde{A}}(j)$ eine Jordan-Hölder-Reihe mit $U_t/U_{t-1} \cong S(i_t)$. Zunächst gilt $i_t \in \Lambda^{(j)}$ für alle $t \in [1, m]$ und $S(i_t) \ncong S(i_{t'})$, d.h. $i_t \neq i_{t'}$ wenn $t \neq t'$. Außerdem gilt $U_t = P_{\widetilde{A}}(i_t) + U_{t-1}$, denn $P_{\widetilde{A}}(i_t)$ ist der einzige Untermodul von $P_{\widetilde{A}}(j)$ aus $\mathbf{Lok}(P_{\widetilde{A}}(j) : S(i_t))$. Insbesondere gilt $P_{\widetilde{A}}(i_t) \not\subseteq U_i$ für alle $i \in [1, t-1]$. Wir betrachten nun das Tupel $(i_1, \dots i_m)$. Angenommen $t < t'$ und $i_t > i_{t'}$, dann gilt $P(i_{t'}) \subset P(i_t)$.

Damit ist $P(i_{t'})$ ein Untermodul von $U_t = P(i_t) + U_{t-1}$. Dies steht im Widerspruch zu $P(i_t) \nsubseteq U_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, t, \ldots, t'-1\}$. Das Tupel $(i_1, \ldots, i_m)$ ist also ein Element aus $\mathcal{T}(j)$ und damit ist H_1 surjektiv.
Analog verläuft der Beweis für die Surjektivität von H_2. Ist $0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_{t-1} \subset D_t \subset \cdots \subset D_m = P_A(j)$ eine Δ-Filtrierung mit $D_t/D_{t-1} \cong \Delta(i_t)$, dann gilt $i_t \in \Lambda^{(j)}$ nach der Definition einer 1-quasi-erblichen Algebra. Nach dem Lemma 3.4 gilt $D_t = P_A(i_t) + D_{t-1}$ und daraus folgt $P_{i_t} \nsubseteq D_i$ für alle $i \in [1, t-1]$. Mit der gleichen Argumentation wie oben erhalten wir, dass das Tupel $(i_1, \ldots, i_m)$ ein Element aus $\mathcal{T}(j)$ ist und $H_2(i_1, \ldots, i_m) = 0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_{t-1} \subset D_t \subset \cdots \subset D_m = P_A(j)$. Die Surjektivität von H_3 folgt aus der Dualität. $\square$

Betrachten wir die Teilmenge $\top(j) := \left\{\sum_{i\in\Lambda} P_A(i) \mid \Lambda \subseteq \Lambda^{(j)}\right\}$ von $\mathbf{UM}(P_A(j))$, so erhalten wir $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \in \top(j)$ und $\mathcal{U} + \mathcal{U}' \in \top(j)$ für alle $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \top(j)$, d.h. $\top(j)$ ist ein Unterverband von $\mathbf{UM}(P_A(j))$ und damit kann sie auch in einem Diagramm veranschaulicht werden. Die Moduln in jeder Δ-Filtrierung von $P_A(j)$ sind in $\top(j)$ enthalten und jede Filtrierung von $P_A(j)$ aus Moduln von $\top(j)$ kann zu einer Δ-Filtrierung von $P_A(j)$ verfeinert werden (und nicht mehr). Die Zuordnung $\mathbf{UM}(P_{\widetilde{A}}(j)) \longrightarrow \top(j)$ mit $U \mapsto \mathcal{U} := \sum_{i\in\Lambda_U} P_A(i)$ ist offensichtlich eine bijektive Abbildung. Aus dem Lemma 5.1, erhalten wir: Wenn für $U, U' \in \mathbf{UM}(P_{\widetilde{A}}(j))$ gilt $U/U' \cong S_{\widetilde{A}}(i)$, dann ist $\mathcal{U}/\mathcal{U}' \cong \Delta_A(i)$. Auf diese Weise erhalten wir eine Entsprechung zu der Visualisierung der Diagramme von $\mathbf{UM}(P_{\widetilde{A}}(j))$ und $\top(j)$. Wie bereits beschrieben, korrespondieren die Farben der Linien im Diagramm von $\mathbf{UM}(P_{\widetilde{A}}(j))$ mit den Farben der Punkte aus Q_0. Analog dazu veranschaulichen wir das Diagramm von $\top(j)$: Die Punkte, die die Moduln $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}'$ aus $\top(j)$ repräsentieren, sind genau dann verbunden, wenn $\mathcal{U}/\mathcal{U}' \cong \Delta_A(i)$ (oder $\mathcal{U}'/\mathcal{U} \cong \Delta_A(i)$) für ein $i \in Q_0$. In diesem Fall erhält solch eine Linie die Farbe des Punktes i. Genauso erhalten wir auch die Visualisierung von $\top(j)$.
Analog dazu ist $\bot(j) := \left\{\left(\bigcap_{i\in\Lambda} \mathrm{Ker}\,(P(n) \twoheadrightarrow I(i))\right) / \mathrm{Ker}\,(P(n) \twoheadrightarrow I(j)) \mid \Lambda \subseteq \Lambda^{(j)}\right\}$ ein Unterverband von $\mathbf{UM}(I(j))$ und kann damit auch in analoger Weise visualisiert werden.

Bemerkung 4.5. Das Diagramm $\top(n)$ hat die gleiche Struktur wie das Diagramm von $\mathbf{UM}(\nabla(1))$. Die Farben der Linien des Diagramms von $\top(n)$ korrespondieren mit denen des Diagramms von $\mathbf{UM}(\nabla(1))$. Der Unterschied ist nur, dass im Diagramm von $\top(n)$ die Standard- und im Diagramm von $\mathbf{UM}(\nabla(1))$ die einfachen Faktoren gemeint sind. Analog dazu korrespondieren die Strukturen der Diagramme von Unterverbänden von $\bot(n)$ und $\mathbf{UM}(\Delta(1))$.

Hier nun einige Eigenschaften der A-Moduln von der Form $\sum_{i\in\Lambda} P(i)$ für eine beliebige Teilmenge Λ von Q_0. Wir werden sie im nächsten Abschnitt verwenden.

Lemma 4.6. *Seien Λ, Λ' zwei Teilmengen von Q_0 mit $M' := \sum_{i\in\Lambda'} P(i)$ und $M := \sum_{i\in\Lambda} P(i)$.*

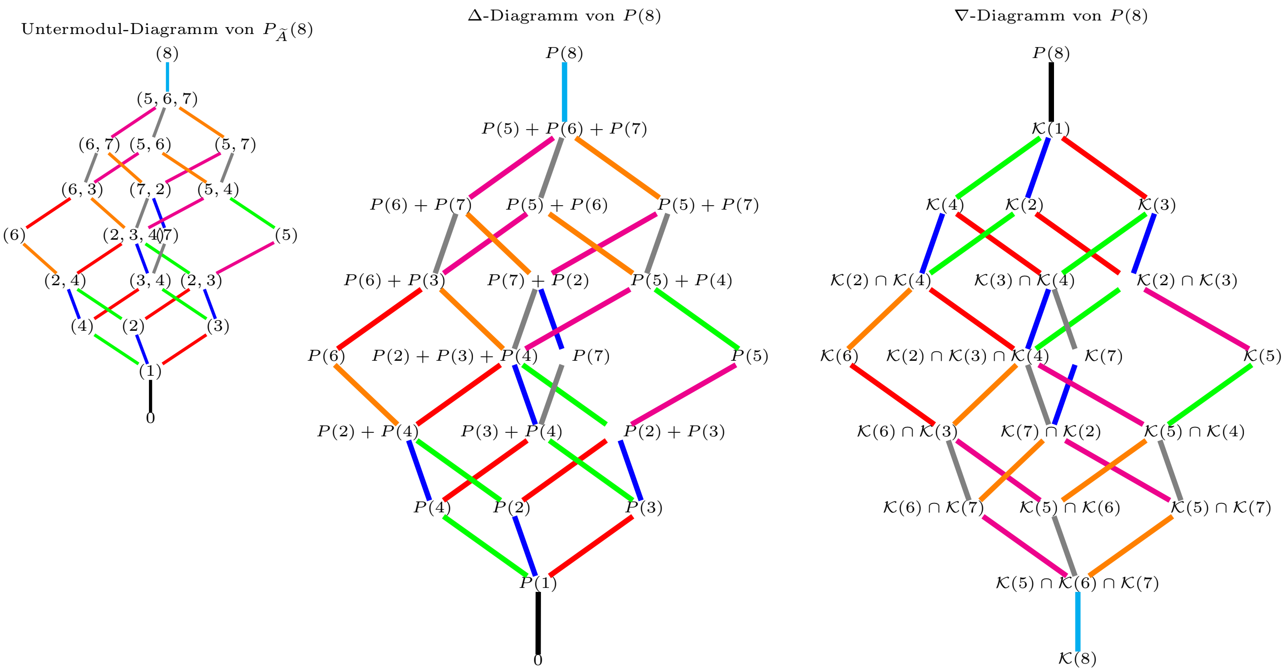
(a) $M' \subseteq M$ genau dann, wenn $M/M' \in \mathfrak{F}(\Delta)$.

(b) Wenn $M' \subseteq M$, dann $[M/M' : \Delta(j)] = \begin{cases} 1 & \textit{wenn } j \in \left(\bigcup_{i\in\Lambda} \Lambda^{(i)}\right) \setminus \left(\bigcup_{i\in\Lambda'} \Lambda^{(i)}\right) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$

(c) Wenn $M' \subseteq M$, dann $soc\,(M/M') \in add(S(n))$.

Beweis. „ $\Leftarrow$ ". Wenn $M/M' \in \mathfrak{F}(\Delta)$, ist M' insbesondere ein Untermodul von M.
„ $\Rightarrow$ ". Wenn $\sum_{i\in\Lambda'} P(i) \subseteq \sum_{i\in\Lambda} P(i)$, dann existiert für jedes $i' \in \Lambda'$ ein $i \in \Lambda$ mit $i' \leqslant i$, damit ist $\sum_{i\in\Lambda'} P(i)$ ein Untermodul von $\sum_{i\in\Lambda} P(i)$. Wir betrachten nun die Filtrierung $0 \subseteq \sum_{i\in\Lambda'} P_{\widetilde{A}}(i) \subseteq \sum_{i\in\Lambda} P_{\widetilde{A}}(i) \subseteq P_{\widetilde{A}}(n)$. Sie lässt sich zu einer Jordan-Hölder-Reihe von $P_{\widetilde{A}}(n)$ verfeinern. Dazu existiert nach dem Lemma 4.4 ein Tupel $(i_1, \dots, i_n)$ aus den Elementen aus $\mathcal{T}(n)$, so dass $\sum_{i\in\Lambda'} P_{\widetilde{A}}(i)$ und $\sum_{i\in\Lambda} P_{\widetilde{A}}(i)$ in der Kette von $H_1(i_1, \dots, i_n)$ vorkommen. Für dieses Tupel existiert auch eine Δ-Filtrierung von $P(n)$, so dass M' und M dazu gehören. Damit besitzt der Subfaktor M/M' auch eine Δ-Filtrierung.
(b) Bezeichnen wir mit $\Gamma' := \bigcup_{i\in\Lambda'} \Lambda^{(i)}$ und $\Gamma := \bigcup_{i\in\Lambda} \Lambda^{(i)}$, dann folgt aus $\sum_{i\in\Gamma'} P(i) \subseteq \sum_{i\in\Gamma} P(i)$ folgt $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Nach (a) sind $\sum_{i\in\Gamma} P(i)$ und $\sum_{i\in\Gamma'} P(i)$ Moduln aus $\mathfrak{F}(\Delta)$ und aus der Bemerkung 4.5 und den Eigenschaften von Kostandardmoduln folgt $(\sum_{i\in\Gamma} P(i) : \Delta(j)) = 1$, wenn $j \in \Gamma$ und $(\sum_{i\in\Gamma} P(i) : \Delta(j)) = 0$, wenn $j \notin \Gamma$. Analog dazu gilt $(\sum_{i\in\Gamma'} P(i) : \Delta(j)) = 1$, wenn $j \in \Gamma'$ und $(\sum_{i\in\Gamma} P(i) : \Delta(j)) = 0$, wenn $j \notin \Gamma'$. Daraus folgt (b)
(c) Da nach (a) gilt $M/M' \in \mathfrak{F}(\Delta)$ und der Sockel jedes Standardmoduls zu $S(n)$ isomorph ist, erhalten wir $\operatorname{soc}(M' \subseteq M) \in \operatorname{add}(S(n))$. □

Beispiel 4.7. In den Diagrammen unten sehen wir den bereits betrachteten Untermodulverband des Moduls $P_{\widetilde{A}}(8)$ (Beispiel 4.3) und die Diagramme von $\top(8)$ und $\bot(8)$ (hier ist A die im Beispiel V aus dem Unterabschnitt 1.2.2 gegebene Algebra). Die Linien in den Diagrammen von $\top(8)$ und $\bot(8)$ sind breiter, um sie von der üblichen Darstellungsweise zu unterscheiden, sie symbolisieren Standard- bzw. Kostandardmoduln zum jeweiligen Punkt. Die Diagramme von $\top(j)$ bzw. $\bot(j)$ sind Unterdiagramme von $\top(8)$ bzw. $\bot(8)$ für jedes $j \in Q_0 = \{1, \dots, 8\}$ und damit in $\top(8)$ und $\bot(8)$ zu finden.



2.5 Struktur des charakteristischen Kippmoduls

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass die Faktormoduln $P(n)/\left(\sum_{i\in\Lambda} P(i)\right)$ für alle $\Lambda \subset Q_0$ eine Δ-Filtrierung besitzen. In diesem Abschnitt betrachten wir Bedingungen, unter denen einige dieser Faktormoduln auch eine ∇-Filtrierung besitzen. Befindet sich ein solcher Faktormodul in $\mathfrak{F}(\Delta)\cap\mathfrak{F}(\nabla)$, dann ist er zu einem der Moduln $T(i)$ isomorph, denn $P(n)/\left(\sum_{i\in\Lambda} P(i)\right)$ ist unzerlegbar.

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Faktoralgebren von 1-quasi-erblichen Algebren. Dazu erläutern wir einige Fakten aus der allgemeinen Darstellungstheorie, die in diesem Abschnitt verwendet werden.

Sei A eine K-Algebra und J ein Ideal in A. Der Faktorraum A/J hat auch eine K-Algebra Struktur (Restklassenalgebra). Jeder A-Modul M, der von J annulliert wird, d.h. $\mathrm{JM} = 0$ wird als (A/J)-Modul identifiziert. Der Faktormodul $\mathrm{M}/(\mathrm{JM})$ ist ein (A/J)-Modul für jeden A-Modul M. Dazu ist $\mathrm{P}/(\mathrm{JP})$ ein projektiver (A/J)-Modul, wenn P ein projektiver A-Modul ist. Werden zwei A-Moduln M und M′ von J annulliert, dann gilt offensichtlich $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{M}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A/J}}(\mathrm{M},\mathrm{M}')$.
Sei A eine basische Algebra, (Q,I) der sie darstellende Köcher mit Relationen, Γ eine Teilmenge von Q_0 und $\mathrm{e} = \sum_{i\in\Gamma} \mathrm{e}_i$, dann bildet die Menge der linear unabhängigen Wege der Algebra A, die durch einen der Punkte i aus Γ gehen, eine Basis des K-Unterraums $\mathrm{AeA} = \{a\cdot \mathrm{e}\cdot b \mid a,b\in \mathrm{A}\}$, der offensichtlich ein Ideal von A ist. Die Restklassenalgebra $\mathrm{A}/\mathrm{A}e\mathrm{A}$ wird dann durch den Köcher $\mathrm{Q}' = (\mathrm{Q}_0',\mathrm{Q}_1')$ mit Relationen J' dargestellt, wobei $\mathrm{Q}_0' = Q_0\backslash\Gamma$, $\mathrm{Q}_1' = \{i\to j\in \mathrm{Q}_1 \mid i,j\notin\Gamma\}$, $\mathrm{J}' = \{\rho' \mid \rho\in I\}$, hier $\rho' = \sum c_i \mathrm{w}_i'$ mit

$$\mathrm{w}_i' = \begin{cases} \mathrm{w}_i & \text{wenn } \mathrm{w}_i = (j_1\to i_2\to\cdots\to i_k) \text{ mit } j_l\in Q_0' \text{ für alle } l\in\{1,\ldots,k\},\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}.$$

Eine maximale Menge der linear unabhängigen Wege $i_1\to i_2\to\cdots\to i_l\to\cdots\to i_k$ aus A mit $i_l\notin\Gamma$ für alle $l\in[1,k]$ kann als eine Basis von $\mathrm{A}/\mathrm{A}e\mathrm{A}$ gesehen werden. Ein A-Modul M ist genau dann ein $(\mathrm{A}/\mathrm{A}e\mathrm{A})$-Modul, wenn $\dim_K \mathrm{M}_i = [\mathrm{M} : S(i)] = 0$ für alle $i\in\Gamma$, denn in diesem Fall wird M von $\mathrm{A}e\mathrm{A}$ annulliert.

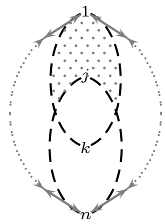
Wir betrachten nun einige Restklassenalgebren von 1-quasi-erblichen Algebren.
Sei also $(A,\leqslant)$ eine 1-quasi-erbliche Algebra mit $A = KQ/\mathrm{I}$, $n = |Q_0|$ und j ein fixierter Punkt aus Q_0. In diesem Abschnitt verwenden wir folgende Bezeichnungen:

- $\Gamma(j) := Q_0\backslash\Lambda_{(j)}$,
- $\mathcal{J}_j := A\left(\sum_{i\in\Gamma(j)} e_i\right)A$
- $A^{(j)} := A/\mathcal{J}_j$

Für die Algebra $A^{(j)} = KQ^{(j)}/\mathrm{I}^{(j)}$ gilt damit Folgendes: $Q_0^{(j)} = Q_0\backslash\Gamma(j) = \Lambda_{(j)}$. Die Halbordnungsrelation $\leqslant$ auf der Menge der Punkte des Köchers von $A^{(j)}$ sei von der Halbordnung $(Q_0,\leqslant)$ induziert, d.h. $\left(Q^{(j)},\leqslant\right) = \left(\Lambda_{(j)},\leqslant\right)$. Die Pfeile von $A^{(j)}$ sind $Q_1^{(j)} = \left\{(i\to j)\in Q_1 \mid i,j\in\Lambda_{(j)}\right\}$. Die Relationen sind $\mathrm{I}^{(j)} = \{\rho' \mid \rho\in \mathrm{I}\}$, wobei ρ' bereits oben

beschrieben ist. Der A-Modul $P(k)/\left(\mathcal{J}_j \cdot P(k)\right)$ ist *der* projektive unzerlegbare $A^{(j)}$-Modul zum Punkt $k \in Q_0^{(j)}$, d.h. $P_{A^{(j)}}(k) \cong P(k)/\left(\mathcal{J}_j \cdot P(k)\right)$.
Bei den Betrachtungen der Algebra $A^{(j)}$ werden wir die Punkte des Köchers $Q_0^{(j)}$ nicht umbenennen, sondern die ursprünglichen Bezeichnungen aus Q_0 verwenden.

Lemma 5.1. *Sei $j \in Q_0$ und $k \in \Lambda_{(j)}$. Es gilt* $\mathcal{J}_j \cdot P(k) = \sum\limits_{i \in \Gamma(j) \cap \Lambda^{(k)}} P(i)$.



Die Elemente aus $\Gamma(j) \cap \Lambda^{(k)}$ befinden sich im punktierten Bereich des Köchers von Q (Bild rechts). Zu bemerken ist, dass der Punkt j nicht Element dieser Menge ist.
Wenn $k = n$, dann $\Gamma(j) \cap \Lambda^{(k)} = \Gamma(j) = Q_0 \backslash \{n\}$

Beweis. Wie bereits erwähnt ist $\mathcal{J}_j$ ein linearer Raum, der von jenen Wegen aus A aufgespannt ist, die durch einen der Punkte aus $\Gamma(j)$ gehen. Somit ist die Menge der linear unabhängigen Wege, die in k starten und durch einen der Punkte aus $\Gamma(j)$ gehen, eine Basis von $\mathcal{J}_j \cdot P(k)$. Nach 3.11 ist $\dot{\bigcup}_{i \in \Lambda^{(k)}} B_{(i)}$ eine Basis von $P(k)$ damit ist $\dot{\bigcup}_{i \in \Gamma(j) \cap \Lambda^{(k)}} B_{(i)}$ eine Basis von $\mathcal{J}_j \cdot P(k)$.
"$\subseteq$". Sei $w \in \dot{\bigcup}_{i \in \Gamma(j) \cap \Lambda^{(k)}} B_{(i)}$, dann gilt $w = w_i^{(k')}(k)$ für ein $i \in \Gamma(j) \cap \Lambda^{(k)}$ und ein $k' \in \Lambda_{(i)}$. Nach der Definition von $w_i^{(k')}(k)$ erhalten wir $w_i^{(k')}(k) \in \sum_{i \in \Lambda_{(j)} \cap \Lambda^{(k)}} P(i)$, also gilt $\mathcal{J}_j \cdot P(k) \subseteq \sum_{i \in \Lambda_{(j)} \cap \Lambda^{(k)}} P(i)$.
"$\supseteq$". Sei $i \in \Gamma(j) \cap \Lambda^{(k)}$ und $w_i^{(i)}(k)$ ein steigender Weg von k nach i, dann gilt offensichtlich $w_i^{(i)}(k) \in \mathcal{J}_j \cdot P(k)$ und damit ist ein von $w_i^{(i)}(k)$ erzeugter Modul ein Untermodul von $\mathcal{J}_j \cdot P(k)$. Nach Lemma 2.4 (Kap. 1) erhalten wir $\left\langle w_i^{(i)}(k) \right\rangle = P(i) \subseteq \mathcal{J}_j \cdot P(k)$. Da es für jedes $i \in \Gamma(j) \cap \Lambda^{(k)}$ erfüllt ist, gilt $\mathcal{J}_j \cdot P(k) \supseteq \sum_{i \in \Lambda_{(j)} \cap \Lambda^{(k)}} P(i)$.
Insbesondere gilt $\mathcal{J}_j \cdot P(j) = \sum_{\substack{i \in Q_0 \\ i \lhd j}} P(i)$, denn $\Gamma(j) \cap \Lambda^{(j)} = \{i \in Q_0 \mid i < j\}$ und aus 3.4 (Kap. 1) folgt diese Gleichung. Außerdem gilt $\mathcal{J}_j \cdot P(n) = \sum\limits_{i \in \Gamma(j)} P(i)$, denn $\Lambda^{(n)} = Q_0$. $\square$

Das letzte Lemma zeigt, dass alle projektiven unzerlegbaren $A^{(j)}$-Moduln die Faktormoduln von projektiven unzerlegbaren A-Moduln sind und nach Lemma 5.1 und Lemma 4.7 in $\mathfrak{F}(\Delta)$ enthalten sind. Die Eigenschaften dieser Moduln zeigen dann, ob die Algebra $A^{(j)}$ eine 1-quasi-erbliche K-Algebra ist.

Lemma 5.2. *Für jedes $j \in Q_0$ ist $A^{(j)} = KQ^{(j)}/I^{(j)}$ eine quasi-erbliche Algebra und für alle $k \in \Lambda_{(j)}$ ist Folgendes erfüllt:*

(a) $\{j\} = \min\left\{\left(Q_0^{(j)}, \leqslant\right)\right\}$ *und* $\{n\} = \max\left\{\left(Q_0^{(j)}, \leqslant\right)\right\}$,

(b) $\Delta_{A^{(j)}}(k) = \Delta(k)$,

(c) $\nabla_{A^{(j)}}(k) = \nabla(k)$,

(d) $P_{A^{(j)}}(k) \hookrightarrow P_{A^{(j)}}(n)$,

(e) $(P_{A^{(j)}}(k) : \Delta_{A^{(j)}}(i)) = [\Delta_{A^{(j)}}(i) : S(k)] = \begin{cases} 1 & \textit{wenn } i \leqslant k, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$

Beweis. Der Köcher von $A^{(j)}$ ist der Unterköcher $(\Lambda_{(j)}, \leqslant)$ von $(Q_0, \leqslant)$, also folgt (a).
(b) Nach Lemma 5.1 gilt $P_{A^{(j)}}(k) = P(j)/\left(\sum_{i\in\Gamma(j)\cap\Lambda^{(k)}} P(i)\right)$. Aus $\Gamma(j) \cap \Lambda^{(k)} \subseteq \Lambda^{(k)} \setminus \{k\}$ folgt $\sum_{i\in\Gamma(j)\cap\Lambda^{(k)}} P(i) \subseteq \sum_{i\in\Lambda^{(j)}\setminus\{j\}} P(i) = \sum_{\substack{i\in Q_0 \\ i\lhd j}} P(i)$. Somit ist $\Delta(k)$ ein Faktormodul von $P_{A^{(j)}}(k)$ und, wegen seiner Eigenschaften als Standardmodul, maximal unter allen Faktormoduln von $P_{A^{(j)}}(k)$ mit der Eigenschaft, dass für jeden zu $S(l)$ isomorphen Kompositionsfaktor $l \in \Lambda_{(k)}$ gilt. Damit gilt $\Delta(k) = \Delta_{A^{(j)}}(k)$ für alle $k \in \Lambda_{(j)}$.
Nach Lemma 4.7 erhalten wir $P_{A^{(j)}}(k) = P(j)/\left(\sum_{i\in\Gamma(j)\cap\Lambda^{(j)}} P(i)\right) \in \mathfrak{F}(\Delta)$ und die Kompositionsfaktoren jeder Δ-Filtrierung sind aus $\{\Delta(l) \mid j \leqslant l \leqslant k\} = \{\Delta_{A^{(j)}}(l) \mid j \leqslant l \leqslant k\}$. Damit ist $A^{(j)}$ eine quasi-erbliche Algebra.
(c) Es reicht zu zeigen $\left(A^{(j)}\right)^{op} = (A^{op})^{(j)}$. Aus (b) erhalten wir $\Delta_{(A^{op})^{(j)}}(k) = \Delta_{A^{op}}(k)$ und aus den Dualitäts-Eigenschaften folgt $\nabla(k) = \nabla_{A^{(j)}}(k)$.
Aus $(Q_0, \leqslant) = \left(Q_0^{(op)}, \leqslant\right)$ folgt, dass die Köcher von $\left(Q^{(j)}\right)^{op}$ und $(A^{op})^{(j)}$ gleich sind. Seien nun $\rho \in I$ und $\overline{\rho} \in I^{(j)}$, $\rho^{op} \in I^{op}$ sowie $\overline{\rho^{op}} \in (I^{op})^{(j)}$ zu ρ korrespondierende Relationen. Es ist leicht zu errechnen, dass $\overline{\rho}^{op} = \overline{\rho^{op}}$ gilt und damit $\left(A^{(j)}\right)^{op} = (A^{op})^{(j)}$.
(d) Aus der Gleichung $P(k) \cap \left(\sum_{i\in\Gamma(j)} P(i)\right) = \sum_{i\in\Gamma(j)\cap\Lambda^{(k)}} P(i)$ und $\sum_{i\in\Lambda} P(i) \subseteq P(n)$ für jede Teilmenge $\Lambda \subseteq Q_0$ erhalten wir:

$$P(k)/\left(\sum_{i\in\Gamma(j)\cap\Lambda^{(k)}} P(i)\right) \cong \left(P(k) + \sum_{i\in\Gamma(j)} P(i)\right)/\left(\sum_{i\in\Gamma(j)} P(i)\right) \subseteq P(n)/\left(\sum_{i\in\Gamma(j)} P(i)\right).$$

Für jedes $k \in \Lambda_{(j)}$ ist der Modul $P(k)/\left(\sum_{i\in\Lambda_{(j)}\cap\Lambda^{(k)}} P(i)\right)$ zu einem Untermodul von $P(n)/\left(\sum_{i\in\Gamma(j)} P(i)\right)$ isomorph, d.h. $P_{A^{(j)}}(k) \hookrightarrow P_{A^{(j)}}(n)$.
(e) folgt aus Lemma 4.7 (b). $\square$

Die Axiome einer 1-quasi-erblichen K-Algebra sind also für $A^{(j)}$ bis auf $\mathrm{soc}P_{A^{(j)}}(k) \cong S(n)$ erfüllt. Aus der Eigenschaft (d) des letzten Lemmas folgt, dass $A^{(j)}$ genau dann eine 1-quasi-erbliche Algebra ist, wenn $\mathrm{soc}P_{A^{(j)}}(n) \cong S(n)$, dies impliziert dann das letzte nötige Axiom. Dennoch gilt dies nicht im Allgemeinen. Dies zeigt sich in einem der später folgenden Beispiele.

Satz 5.3. Sei $j \in Q_0$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $A^{(j)}$ ist eine 1-quasi-erbliche Algebra,

(ii) $\mathrm{soc}\left[P(n)/\left(\sum_{i\in\Gamma_{(j)}} P(i)\right)\right] \cong S(n)$,

Beweis. (i)⇒(ii). Angenommen $A^{(j)}$ ist eine 1-quasi-erbliche Algebra, dann gilt $P_{A^{(j)}}(n) \cong I_{A^{(n)}}$ und damit auch $\mathrm{soc}P_{A^{(n)}} \cong S(n)$.
(ii)⇒(i). Wenn $\mathrm{soc}P_{A^{(j)}}(n) \cong S(n)$, dann gilt nach Lemma 5.2 (d) also $\mathrm{soc}P_{A^{(j)}}(k) \cong S(n)$

für jedes $k \in Q_0^{(j)}$. Damit erfüllt die K-Algebra $A^{(j)}$ alle Axiome einer 1-quasi-erblichen Algebra. $\square$

Nach diesem Satz können wir nun in bestimmten Fällen die unzerlegbaren Summanden des charakteristischen Kippmoduls bestimmen.

Folgerung 5.4. *Wenn soc* $\left[P(n)/\left(\sum_{i\in\Gamma_{(j)}} P(i)\right)\right] \cong S(n)$, *dann* $T(j) \cong P(n)/\left(\sum_{i\in\Gamma_{(j)}} P(i)\right)$.

Beweis. Ist $A^{(j)}$ 1-quasi-erblich, dann ist $P_{A^{(j)}}(n)$ ein projektiver, injektiver unzerlegbarer $A^{(j)}$-Modul, d.h. $P_{A^{(j)}}(n)$ hat $\Delta_{A^{(j)}}$- und $\nabla_{A^{(j)}}$-Filtrierungen. Aus dem Lemma 5.2 (b) und (c) folgt somit $P_{A^{(j)}}(n) \in \mathfrak{F}(\Delta) \cap \mathfrak{F}(\nabla)$. Da $\{j\} = \min\left\{\left(Q_0^{(j)}, \leqslant\right)\right\}$ und $A^{(j)}$ 1-quasi-erblich ist, beginnt jede $\Delta_{A^{(j)}}$-Filtrierung von $P_{A^{(j)}}(n)$ mit $\Delta_{A^{(j)}}(j) = \Delta(j)$ und jede $\nabla_{A^{(j)}}-$Filtrierung von $P_{A^{(j)}}(n)$ endet mit $\nabla_{A^{(j)}}(j) = \nabla(j)$. Aus den Eigenschaften von $T(j)$ folgt $T(j) \cong P_{A^{(j)}}(n)$. $\square$

Bemerkung 5.5. Wenn für jedes $j \in Q_0$ die Algebra $A^{(j)}$ 1-quasi-erblich ist, dann ist

$$T = \bigoplus_{j\in Q_0} \left(P(n)/\left(\sum_{i\in\Gamma(j)} P(i)\right)\right)$$

der charakteristische Kippmodul von A.

Lemma 5.6. *Sei* $j \in Q_0$ *mit* $j \lhd n$, *dann sind* $A^{(j)}$ *und die Auslander Algebra von* $K[x]/\langle x^2\rangle$ *isomorph. Insbesondere ist* $A^{(j)}$ *eine 1-quasi-erbliche Algebra.*

Beweis. Ist $j \in Q_0$ ein Nachbar zu n, dann ist $j \leftrightarrows n$ der Köcher von $A^{(j)}$. Für die Standard- und projektiven unzerlegbaren $A^{(j)}$-Moduln gilt: $P_{A^{(j)}}(j) = \Delta_{A^{(j)}}(j) = \Delta(j)$, $\Delta_{A^{(j)}}(n) = \Delta(n) = S(n) = P_{A^{(j)}}(n)/\left(P_{A^{(j)}}(j)\right) = \operatorname{soc}(P_{A^{(j)}}(j))$, $[P_{A^{(j)}}(j) : S(k)] = 1$ für $k = j, n$ und $[P_{A^{(j)}}(j) : S(k)] = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k = j, \\ 2 & \text{wenn } k = n \end{cases}$. Außerdem ist $0 \subset P_{A^{(j)}}(j) \subset P_{A^{(j)}}(n)$ die einzige $\Delta_{A^{(j)}}-$Filtrierung von $P_{A^{(j)}}(n)$.
Der Homomorphismus $f_{(n\to j)} : P_{A^{(j)}}(j) \longrightarrow P_{A^{(j)}}(n)$ zu dem Pfeil $(n \to j)$ ist eine Injektion und für den Homomorphismus $f_{(j\to n)} : P_{A^{(j)}}(n) \longrightarrow P_{A^{(j)}}(j)$ gilt $\operatorname{Im} f_{(j\to n)} = \operatorname{soc} P_{A^{(j)}}(j)$. Damit gilt $j \to n \to j = 0$ und $n \to j \to n \neq 0$, d.h. $I^{(j)} = \langle j \to n \to j\rangle$. Die Algebra, die durch einen solchen Köcher und Relationen dargestellt ist, ist zu der Auslander Algebra $A(2)$ von $K[x]/\langle x^2\rangle$ isomorph. Wie bereits bekannt ist $A(2)$ 1-quasi-erblich. $\square$

Bemerkung 5.7. Aus der Bemerkung 5.5 und Eigenschaften von den direkten Summanden des charakteristischen Kippmoduls erhalten wir Folgendes:

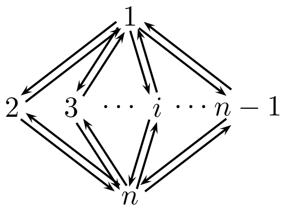
- $T(1) \cong P(n)$,
- $T(n) \cong S(n)$,
- $T(j) \cong P(n)/\left(\sum_{i\in\Gamma_{(j)}} P(i)\right)$ für alle $j \in Q_0$ mit $j \lhd n$.

Beispiel 5.8. Sei $A(n)$ die Auslander Algebra von $K[X]/\langle X^n\rangle$ (sie ist bereits in 1.2.2 (Kap. 1) betrachtet worden) und $Q(n)$ der dazu gehörige Köcher. Die die Algebra $A(n)^{(j)}$ repräsentierenden Köcher und Relationen sind

$$j \rightleftarrows j+1 \quad \cdots \quad n-1 \rightleftarrows n \qquad \begin{array}{rcl} j, j+1, j & = & 0, \\ i, i-1, i & = & i, i+1, i \end{array} \quad \text{für alle} \quad i \in \{j+1, \ldots, n-1\}$$

Offensichtlich sind die Algebren $A(n)^{(j)}$ und $A(n-j+1)$ isomorph, d.h. $A(n)^{(j)}$ ist 1-quasi-erblich. Da $\Lambda_{(j)} = \{1, \ldots, j-1\}$ und $\sum_{i=1}^{j-1} P(i) = P(j-1)$, folgt aus dem letzten Satz $T(j) \cong P(n)/P(j-1)$ für jedes $j \in Q(n)_0$ (hier $P(0) = 0$). Der Modul $\bigoplus_{j\in Q_0} P(n)/P(j-1)$ ist also der charakteristische Kippmodul von $A(n)$.

Beispiel 5.9. Die Algebra A_n sei gegeben durch den folgenden Köcher, die Halbordnung und Relationen.



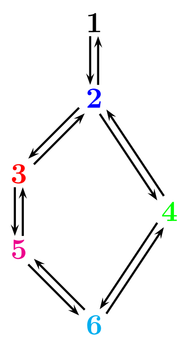
$$\begin{array}{rcl} 1\,i\,1 & = & 0, \\ 1\,i\,n & = & 1\,j\,n, \\ n\,i\,1 & = & n\,j\,1, \\ c_{ij}\cdot i\,1\,j & = & i\,n\,j, \end{array} \qquad \det\begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2,n-1} \\ c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,2} & c_{n-1,3} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \neq 0$$

Es ist leicht zu verifizieren, dass A_n eine 1-quasi-erbliche Algebra ist. Aus der Bemerkung 5.7 folgt: $T(1) = P(n)$, $T(n) = S(n)$ und $T(j) \cong P(n)/\sum_{\substack{k=2\\k\neq j}}^{n-1} P(k)$ für jedes $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, denn $2, \ldots, n-1$ sind Nachbarpunkte von n und $P(1) \subset P(j)$ für jedes j. Damit erhalten wir den charakteristischen Kippmodul T von A_n: $T = \bigoplus_{j\in Q_0} P(n)/\sum_{i\in\Lambda_{(j)}} P(i)$.

Beispiel 5.10. Für die im Beispiel V im 1.2.2 (Kap. 1) beschriebene Algebra A sind $A^{(j)}$ für alle $j \in [1, 8]$ auch 1-quasi-erblich. Der charakteristische Kippmodul von A ist nach dem Satz 5.3

$$\begin{aligned} T_A = {} & \underbrace{P(8)}_{T(1)} \oplus \underbrace{P(8)/P(7)}_{T(2)} \oplus \underbrace{P(8)/P(6)}_{T(3)} \oplus \underbrace{P(8)/P(5)}_{T(4)} \\ & \oplus \underbrace{P(8)/\left(P(6)+P(7)\right)}_{T(5)} \oplus \underbrace{P(8)/\left(P(5)+P(7)\right)}_{T(6)} \oplus \underbrace{P(8)/\left(P(5)+P(6)\right)}_{T(7)} \\ & \oplus \underbrace{P(8)/\left(P(5)+P(6)+P(7)\right)}_{T(8)}. \end{aligned}$$

Beispiel 5.11. Wir betrachten nun die durch den folgenden Köcher mit Relationen beschriebene Algebra $A = KQ/\mathrm{I}$. Die Halbordnung $\leqslant$ auf Q_0 ist durch $1 \lhd 2 \lhd 3 \lhd 5 \lhd 6$ und $2 \lhd 4 \lhd 6$ gegeben.



$$\begin{array}{rcl} 121 & = & 0 \\ 2356 & = & 246 \\ 6532 & = & 642 \\[4pt] 232 & = & 212 \\ 232 & = & 242 \\[4pt] 353 & = & 323 \\ 32124 & = & 3564 \\[4pt] 535 & = & 565 \\ 564 & = & 5324 \\[4pt] 464 & = & \mathbf{2}\cdot 42124 \\ 465 & = & 4235 \end{array}$$

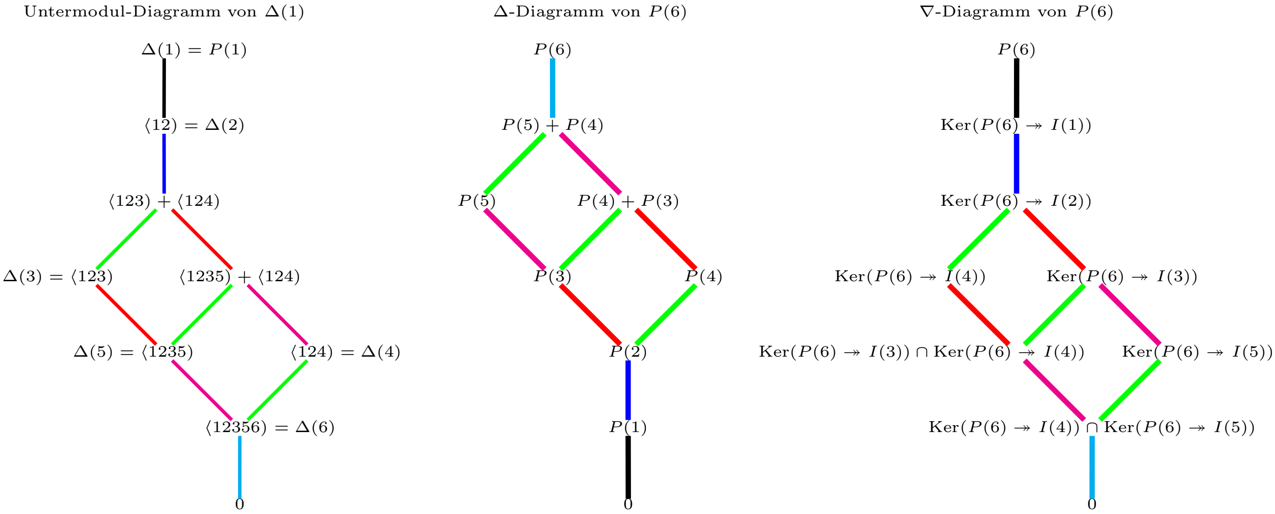
Standardmoduln

$$\begin{array}{rcl} \Delta(1) & = & P(1) \\ \Delta(2) & = & P(2)/P(1) \\ \Delta(3) & = & P(3)/P(2) \\ \Delta(4) & = & P(4)/P(2) \\ \Delta(5) & = & P(5)/P(3) \\ \Delta(6) & = & P(6)/\left(P(4)+P(5)\right) \end{array}$$

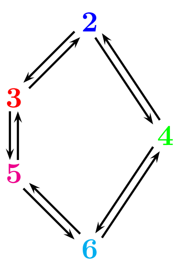
Eine Δ-Filtrierung von $P(j)$

$0 \subset P(1)$
$0 \subset P(1) \subset P(2)$
$0 \subset P(1) \subset P(2) \subset P(3)$
$0 \subset P(1) \subset P(2) \subset P(4)$
$0 \subset P(1) \subset P(2) \subset P(3) \subset P(5)$
$0 \subset P(1) \subset P(2) \subset P(3) \subset P(5) \subset P(4) + P(5) \subset P(6)$

Es ist nicht schwer zu ermitteln, dass alle Axiome einer 1-quasi-erblichen Algebra erfüllt sind. Das Untermodul-Diagramm von $\Delta(1)$ und die daraus resultierenden Δ- und ∇-Diagramme von $P(6)$ sind nachfolgend gezeichnet.



Für die Algebren $A^{(j)} = A/\mathcal{J}_j$ für $j = 3, 4, 5, 6$ gilt $A^{(3)} \cong A(3)$, $A^{(4)} \cong A(2)$, $A^{(5)} \cong A(2)$ und $A^{(6)} \cong K$ (hier ist $A(n)$ die Auslander Algebra zu $K[x]/\langle x^n \rangle$). Es gilt also $T(6) = S(6)$, $T(5) = P(6)/(P(3) + P(4))$, $T(4) = P(6)/P(5)$, $T(3) = P(6)/P(4)$.
Der Köcher und Relationen der Algebra $A^{(2)} = A/(Ae_1A)$ sind



2356	=	246
6532	=	642
232	=	0
232	=	242
353	=	323
0	=	3564
535	=	565
564	=	5324
464	=	0
465	=	4235

Die Wege (64246) und (646 − 65356) sind linear unabhängig und die von ihnen erzeugten Untermoduln von $P(6)$ sind einfach, d.h. der Sockel des $A^{(2)}$-Moduls $P(6)$ ist nicht isomorph zu $S(6)$. Damit ist $A^{(2)}$ keine 1-quasi-erbliche Algebra und $T_A(2) \ncong P(6)/P(1)$.
Es gilt also $\operatorname{soc}(P(6)/P(1)) \cong S(6) \oplus S(6)$.

KAPITEL 3

1-quasi-erbliche Algebren und lokale, selbstinjektive Algebren

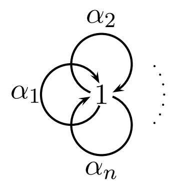
Das Hauptziel dieses Kapitels ist es, eine Verbindung zwischen 1-quasi-erblichen K-Algebren und endlich dimensionalen, lokalen, selbstinjektiven K-Algebren herzustellen, die eine Basis mit der Eigenschaft $\boxed{\preccurlyeq}$ besitzen (Abschnitt 3). Wir definieren also eine injektive Abbildung Φ von der Menge $\mathbf{X}$ (der Isomorphieklassen auf 1-quasi-erblichen K-Algebren) nach der Menge $\mathbf{Y}$ (der Äquivalenzklassen auf $\left\{(L,(\mathfrak{L},\preccurlyeq)) \;\middle|\; \begin{array}{l} L \text{ ist eine lokale, selbstinjektive } K\text{-Algebra}, \dim_K L < \infty, \\ \mathfrak{L} \text{ ist eine Basis von } L \text{ mit der Eigenschaft } \boxed{\preccurlyeq} \end{array}\right\}$).
Wir zeigen, dass sich für jedes Paar aus $\Phi([A])$ eine 1-quasi-erbliche K-Algebra A' mit $[A] = [A']$ konstruieren lässt. Dies basiert auf den doppelt zentrierenden Eigenschaften [KSX] und wird in Abschnitt 4 beschrieben.
Außerdem betrachten wir 1-quasi-erbliche K-Algebren, auf die ein Antiautomorphismus existiert, der die Richtungen der Pfeile in dem Köcher von A vertauscht. Außerdem betrachten wir eine Teilmenge von den oben beschriebenen Paaren, für die die erste Komponente eine kommutative K-Algebra ist. Die Mengen der dazu gehörigen Äquivalenzklassen sind Teilmengen von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$, sie bezeichnen wir mit $\widetilde{\mathbf{X}}$ und $\widetilde{\mathbf{Y}}$. Wir zeigen, dass $\Phi|_{\widetilde{\mathbf{X}}}$ eine bijektive Abbildung von $\widetilde{\mathbf{X}}$ nach $\widetilde{\mathbf{Y}}$ induziert.

Alle in den letzten Kapiteln eingeführten Definitionen und Bezeichnungen behalten weiterhin ihre Gültigkeit. Unter einer Algebra ist hier auch eine endlich dimensionale, basische K-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik 0 gemeint. Und ein Modul ist immer ein endlich dimensionaler Linksmodul.

3.1 Einführung

Hier stellen wir einige Grundlagen von lokalen, selbstinjektiven endlich dimensionalen Algebren vor, die wir in diesem Kapitel verwenden werden. Grundlagen für die nachfolgenden Betrachtungen sind Darstellungstheoretisch allgemein [ARS], [ASS]. Zudem fassen wir einige allgemein bekannte Eigenschaften zur Struktur eines Moduls über seine Endomorphismen-Algebra zusammen. Betrachten wir eine Algebra A als einen A-Modul, dann verwenden wir die konventionelle Bezeichnung ${}_AA$.

Lokale selbstinjektive Algebren. Mit L bezeichnen wir in diesem Abschnitt eine *lokale* K-Algebra, also eine Basis-Algebra, deren Radikal $\mathrm{rad}L$ das eindeutig bestimmte maximale (zweiseitige) Ideal ist.
Es gilt also $\dim_K \mathrm{top}L = 1$ und damit besteht der L darstellende Köcher aus einem Punkt und endlich vielen Pfeilen und all diese starten und enden in diesem Punkt (solche Pfeile heißen *Schlaufen*). Insbesondere ist der triviale Weg $e := e_1$ das Einselement dieser Algebra.
Die Pfeile $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und das Einselement bilden ein Erzeugendensystem von L.



Jeder Weg von KQ (Q ist der oben gezeichnete Köcher) hat die Form $\alpha_{i_1} \cdot \alpha_{i_2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{i_r}$, wobei $r \in \mathbb{N}$ und $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$ und damit hat jede Relation der Algebra L die Gestalt $\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \cdot \left(\alpha_{i_1}^{(k)} \cdot \alpha_{i_2}^{(k)} \cdot \cdots \cdot \alpha_{i_{r_k}}^{(k)}\right)$ mit $\alpha_{i_t}^{(k)} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Eine Algebra L, die von solch einem Köcher und einer Menge von Relationen I dargestellt wird, ist offensichtlich zu einer Faktoralgebra der (nicht kommutativen) Polynomalgebra in n Variablen isomorph, d.h. $L \cong K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / P$, wobei P ein Ideal von $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ ist, das von den Polynomen $\{p_\rho \mid \rho \in \mathrm{I}\}$ erzeugt ist, wobei $p_\rho = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \cdot \left(x_{i_1}^{(k)} \cdot x_{i_2}^{(k)} \cdot \cdots \cdot x_{i_{r_k}}^{(k)}\right)$ für ein $\rho = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \cdot \left(\alpha_{i_1}^{(k)} \cdot \alpha_{i_2}^{(k)} \cdot \cdots \cdot \alpha_{i_{r_k}}^{(k)}\right) \in \mathrm{I}$ (x_i korrespondiert mit α_i). Ist L endlich dimensional, dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass die Restklassen der Monomen m-ten Grades in L verschwinden, d.h. L ist eine Faktoralgebra von $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / \langle x_1, \ldots, x_n\rangle^m$.
Offensichtlich ist ${}_LL$ *der* eindeutig bestimmte projektive unzerlegbare L-Modul, d.h. ${}_LL = P(1)$. Jedes Element von L liegt in dem (Unter)Vektorraum von L, der zu dem einzigen Punkt des Köchers korrespondiert. Damit erzeugt jedes von Null verschiedene Element a einen lokalen Untermodul $\langle a\rangle$ von ${}_LL$. Insbesondere ist ${}_LL$ eine projektive Decke jedes lokalen L-Moduls, d.h. $\langle a\rangle$ ist ein Faktormodul von ${}_LL$ und $\mathrm{rad}\,\langle a\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha_i \cdot a\rangle$.
Jeder Endomorphismus F von ${}_LL$ ist durch $F(e)$ eindeutig bestimmt, d.h. wenn $F(e) = r$, dann gilt $F(a) = a \cdot r$ für alle $a \in L$. Deshalb identifizieren wir F in diesem Fall mit $F_r : {}_LL \to {}_LL$, wobei $F_r(e) = r$. Jeder Endomorphismus von ${}_LL$ ist entweder ein Isomorphismus oder nilpotent. Ein Endomorphismus $F_r \in \mathrm{End}_L(L)$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $r = c \cdot 1 + a$ für ein $c \in K^*$ und ein $a \in \mathrm{rad}_L L$.

Eine Algebra A heißt *selbstinjektiv*, wenn ${}_AA$ ein injektiver A-Modul ist, d.h. wenn alle projektiven A-Moduln auch injektiv sind. Eine lokale Algebra L ist also genau dann selbstinjektiv, wenn der Sockel von ${}_LL$ einfach ist. Für jeden $U \in \mathbf{UM}({}_LL)\setminus\{0\}$ gilt damit $\mathrm{soc}_L L \subseteq U$. Da aber U eine Summe von gewissen lokalen Untermoduln von ${}_LL$ ist, erhalten wir Folgendes: Eine lokale Algebra L ist genau dann selbstinjektiv, wenn $\mathrm{soc}_L L \subseteq \langle a\rangle$ für alle $a \in L\setminus\{0\}$. Insbesondere ist ${}_LL$ in diesem Fall eine projektive Decke und eine injektive Hülle von $\langle a\rangle$. Ist $f : \langle a\rangle \to \langle a'\rangle$ ein L-Modul Homomorphismus (hier $a, a' \in L$), dann existieren $r, r' \in L$, so dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}_LL & \twoheadrightarrow & \langle a\rangle \\ F_{r'} \downarrow & & \downarrow f \\ {}_LL & \twoheadrightarrow & \langle a'\rangle \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} \langle a\rangle & \hookrightarrow & {}_LL \\ f \downarrow & & \downarrow F_r \\ \langle a'\rangle & \hookrightarrow & {}_LL \end{array}$$

kommutativ sind. Anders gesagt, für jeden L-Homomorphismus $f : \langle a\rangle \longrightarrow \langle a'\rangle$ gibt es $r, r' \in L$ mit $f(a) = a \cdot r = r' \cdot a'$.
In diesem Kapitel betrachten wir insbesondere lokale selbstinjektive Algebren, die *kommu-*

tativ sind. Sei $L = K\langle x_1,\dots,x_n\rangle/P$ kommutativ, dann gilt $X_i \cdot X_j = X_j \cdot X_i$ für alle $i,j \in [1,n]$, wobei $X_i = x_i + P$. Die Kommutativität von L wird durch die Bezeichnung der Klammern ausgedrückt, d.h. ist L kommutativ, dann schreibt man $L = K[x_1,\dots,x_n]/P$ und die Polynome $x_i \cdot x_j - x_j \cdot x_i$ in P werden nicht mehr erwähnt. Der von $a \in L$ erzeugte L-Modul ist ein zweiseitiges Ideal von L, ihn bezeichnen wir mit $\langle a\rangle$. Zwei lokale Ideale von L sind genau dann isomorph wenn sie gleich sind: Sei $a, a' \in L$ und $\langle a\rangle \xrightarrow{f} \langle a'\rangle$ ein L-Homomorphismus mit $f(a) = a\cdot r$ für ein $r \in L$. Dann ist $\mathrm{Im}f = L\cdot(a\cdot r) = L\cdot(r\cdot a)$ der von $r \cdot a$ erzeugte Untermodul (Unterideal) von $\langle a\rangle$, d.h. $\mathrm{Im}f \subseteq \langle a\rangle \cap \langle a'\rangle$. Ist f ein Isomorphismus, so erhalten wir $\mathrm{Im}f = \langle a\rangle \cap \langle a'\rangle = \langle a'\rangle$, d.h. $\langle a'\rangle \subseteq \langle a\rangle$ und aus $\dim_K\langle a\rangle = \dim_K\langle a'\rangle$ folgt daher $\langle a\rangle = \langle a'\rangle$. In diesem Fall gilt $a = c\cdot a' + \mathtt{r}$, wobei $c \in K^*$ und $\mathtt{r} \in \mathrm{rad}\,\langle a\rangle$.

Endomorphismen-Algebra. Wenn in diesem Kapitel die Rede von lokalen Algebren ist, dann geschieht das meistens im Zusammenhang mit der Endomorphismen-Algebra eines unzerlegbaren A-Moduls. Dazu werden wir bereits Bekanntes aus der allgemeinen Modul-Theorie noch einmal ansprechen.
Sei A eine K-Algebra und M ein A-Modul, dann ist der K-Vektorraum $\mathrm{End}_A(M)$ zusammen mit der Komposition $\left(M \xrightarrow{f} M, M \xrightarrow{g} M\right) \mapsto (f\circ g) : M \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} M$ als Multiplikation eine K-Algebra, die *Endomorphismen-Algebra* von M genannt wird. Ist die Dimension von M endlich, dann ist $\mathrm{End}_A(M)$ eine endlich dimensionale K-Algebra. Seien $M_1,\dots,M_n$ die unzerlegbaren direkten Summanden von M, d.h. $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, dann existiert ein Köcher Q mit Relationen I, so dass mod-$\mathrm{End}_A(M)$ und mod-KQ/I (Morita) äquivalent sind. Sind $M_1,\dots,M_n$ paarweise nicht isomorph, dann ist $\mathrm{End}_A(M)$ basisch und damit gilt $\mathrm{End}_A(M) \cong KQ/\mathrm{I}$. Im letzten Fall korrespondiert jeder Punkt aus Q_0 mit einem direkten Summanden von M, d.h. $n = |Q_0|$ (offensichtlich ist $\mathrm{End}_A(M)$ genau dann eine lokale Algebra, wenn M unzerlegbar ist).
Mit der Operation $\begin{array}{ccc}\mathrm{End}_A(M)\times M & \to & M\\ (f,\ u) & \mapsto & f(u)\end{array}$ ist M auch ein (links) $\mathrm{End}_A(M)$-Modul und jeder K-Untervektorraum von M, der f-invariant ist für alle $f \in \mathrm{End}_A(M)$, ist ein Untermodul von M als einem $\mathrm{End}_A(M)$-Modul.
Hauptsächlich werden wir die Struktur eines projektiven unzerlegbaren A-Moduls als Modul über seiner Endomorphismen-Algebra betrachten. Dazu erinnern wir an einige allgemein bekannte Eigenschaften: Seien $i,j \in Q_0$, wobei Q der darstellende Köcher einer Algebra A ist.
Wie bereits in 1.1.1 (Kap. 1) erwähnt, ist der mit i korrespondierende Untervektorraum $P(j)_i$ von $P(j)$ zu $\mathrm{Hom}_A(P(i),P(j))$ isomorph. Für $P(j)$ als K-Vektorraum gilt $P(j) \cong \bigoplus_{i\in Q_0} P(j)_i \cong \bigoplus_{i\in Q_0}\mathrm{Hom}_A(P(i),P(j))$. Durch die Operation $(f,g) \mapsto f\circ g$, wobei $f \in \mathrm{End}_A(P(j))$ und $g \in \mathrm{Hom}_A(P(i),P(j))$, wird $\mathrm{Hom}_A(P(i),P(j))$ ein $\mathrm{End}_A(P(j))$-Modul. Damit sind $\mathrm{Hom}_A(P(i),P(j))$ für alle $i \in Q_0$ (nicht notwendig unzerlegbaren) direkte Summanden von $P(j)$ als einem $\mathrm{End}_A(P(j))$-Modul.
An dieser Stelle sei noch einmal erwähnt, dass eine Basis $\{u_1,\dots,u_m\}$ von $P(j)_i$ eine Basis $\{F_{u_1},\dots,F_{u_n}\}$ von $\mathrm{Hom}_A(P(i),P(j))$ induziert, hier ist $F_u(a\cdot w_i) = a\cdot u\cdot w_j$, wobei $\langle w_i\rangle = P(i)$, $\langle w_j\rangle = P(j)$ und $a \in A$.

Weiter betrachten wir Endomorphismen-Algebren von gewissen Moduln einer kommutativen, lokalen und selbstinjektiven K-Algebra. Dabei stellen wir eine Verbindung zu einer Unterklasse von 1-quasi-erblichen K-Algebren fest. Ein wichtiger Bezug ist das Theorem von Dlab, Heath und Marko in [DHM]:

> Seien L eine kommutative, lokale und selbstinjektive K-Algebra mit $\dim_K L = n$ und $\mathfrak{X} = \{X(\theta) \mid \theta \in \Theta\}$ eine Menge von lokalen Idealen von L. Es gibt ein $\widetilde{\theta} \in \Theta$ mit $L = X(\widetilde{\theta})$ und die Menge Θ ist bezüglich der Inklusion von Idealen partiell geordnet: $X(\vartheta) \subset X(\theta)$ genau dann, wenn $\theta < \vartheta$. Die K-Algebra $A = \mathrm{End}_L\left(\bigoplus_{\theta\in\Theta} X(\theta)\right)$ ist genau dann quasi-erblich, wenn $|\Theta| = n$ und $\mathrm{rad}X(\theta) = \sum_{\vartheta<\theta} X(\vartheta)$ für jedes $\theta \in \Theta$.

(Die Halbordnung $(\Theta, \leq)$ in [DHM] ist durch « $X(\vartheta) \subset X(\theta)$ genau dann, wenn $\vartheta > \theta$ » gegeben. Wir verwenden hier die entgegengesetzte Halbordnung, um einige Entsprechungen besser zu verdeutlichen.)
Sind die Voraussetzungen des Theorems erfüllt, dann sind folgende Eigenschaften leicht zu verifizieren [DHM]:

- $\widetilde{\theta}$ ist ein eindeutig bestimmtes maximales Element in $(\Theta, \leq)$ (Bezeichnung: $\theta_n := \widetilde{\theta}$),
- es existiert ein $\theta' \in \Theta$ mit $L/\mathrm{rad}L \cong X(\theta')$ und θ' ist ein eindeutig bestimmtes minimales Element bezüglich $\leq$ (Bezeichnung $\theta_1 := \theta'$),
- $[\Delta(\theta) : S(\vartheta)] = (P(\vartheta) : \Delta(\theta)) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \theta \leq \vartheta, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$ für alle $\theta, \vartheta \in \Theta$,
- $P(\theta_n) \cong I(\theta_n)$ und $P(\vartheta) \subseteq P(\theta_n)$, d.h. es gilt $\mathrm{soc}P(\vartheta) \cong S(\theta_n)$ für alle $\vartheta \in \Theta$,
- $\mathrm{soc}\Delta(\theta) \cong S(\theta_1)$ und $\Delta(\vartheta) \subseteq \Delta(\theta_1)$ für alle $\vartheta \in \Theta$,
- A ist eine *BGG-Algebra*, d.h. auf mod-A existiert eine Dualität D mit $D(S) \cong S$ für alle einfachen A-Moduln S. Insbesondere gilt $D(\Delta(\theta)) \cong \nabla(\theta)$ für alle $\theta \in \Theta$ und damit $\nabla(\theta_1) \twoheadrightarrow \nabla(\theta)$,
- der Köcher Q von A besteht aus n Punkten, die mit Elementen von Θ korrespondieren. Für $\theta > \vartheta$ existiert ein Pfeil $(i_\theta \to i_\vartheta) \in Q_1$ genau dann, wenn $X(\theta) \subset X(\vartheta)$ und kein $X(\delta)$ mit $X(\theta) \subset X(\delta) \subset X(\vartheta)$ existiert (dieser Pfeil korrespondiert mit einer Inklusion $X(\theta) \hookrightarrow X(\vartheta)$). Weiterhin gibt es in diesem Fall genau ein Pfeil $(i_\theta \leftarrow i_\vartheta) \in Q_1$ und der korrespondiert mit einem Epimorphismus $X(\vartheta) \twoheadrightarrow X(\theta)$. In anderen Fällen sind die Punkte in Q nicht verbunden.

Ist also L eine kommutative, lokale, selbstinjektive K-Algebra mit $\dim_K L = n$ und dazu $(\mathfrak{X} = \{X(\theta_1), \ldots, X(\theta_n)\}, \subseteq)$ eine partiell geordnete Menge von lokalen Idealen von L mit $L \in \mathfrak{X}$ und $\mathrm{rad}X(\theta) = \sum_{X(\vartheta)\subset X(\theta)} X(\vartheta)$ für alle $X(\theta) \in \mathfrak{X}$, dann ist $\mathrm{End}_L\left(\bigoplus_{X(\theta)\in\mathfrak{X}} X(\theta)\right)$ eine 1-quasi-erbliche K-Algebra.

3.2 Struktur von $P(n)$ als $\mathrm{End}_A(P(n))$-Modul

Im letzten Kapitel ist eine 1-quasi-erbliche Algebra A vorgestellt und betrachtet worden. Ausschlaggebend für die Eigenschaften dieser Algebra ist der projektive unzerlegbare A-Modul zu dem maximalen Punkt n bezüglich der gegebenen Halbordnung auf dem Köcher von A. Im Abschnitt 3

(Kap. 2) wurde eine Basis $\mathbf{B}(n)$ von $P(n)$ definiert, die auch eine wichtige Rolle in diesem Abschnitt spielt. Wir betrachten die Struktur von $P(n)$ über seiner Endomorphismen-Algebra und zeigen, dass die von $\mathbf{B}(n)$ induzierte Basis von $\mathrm{End}_A(P(n))$ die Struktur von $P(n)$ als $\mathrm{End}_A(P(n))$-Modul beschreibt.

In diesem Abschnitt sei $(A = KQ/\mathrm{I}, \leqslant)$ eine 1-quasi-erbliche Algebra, für $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ ist 1 das minimale Element in Q_0 und $n = |Q_0|$ das maximale Element in Q_0 bezüglich $\leqslant$. Für jedes $j \in Q_0$ sind mit $\Lambda^{(j)}$ bzw. $\Lambda_{(j)}$ die Teilmengen $\{i \in Q_0 \mid i \leqslant j\}$ bzw. $\{i \in Q_0 \mid j \leqslant i\}$ von Q_0 bezeichnet.
Für weitere Betrachtungen verwenden wir einige Eigenschaften von projektiven unzerlegbaren A-Moduln, die im letzten Kapitel beschrieben wurden. Hier eine kurze Zusammenfassung der Definitionen und Bezeichnungen, die wir in diesem Abschnitt verwenden werden:

- Der Köcher von A hängt nur von der Halbordnungsrelation $\leqslant$ auf Q_0 ab: Wenn für $i, j \in Q_0$ gilt $i \lhd j$, dann gibt es genau einen Pfeil $(i \to j) \in Q_1$ und genau einen Pfeil $(j \to i) \in Q_0$. Wenn $i \not\trianglerighteq j$ oder $j \not\trianglerighteq i$, dann gibt es keinen Pfeil in Q_0, der i und j verbindet.

- Für $i, j \in Q_0$ bezeichnen wir mit $w \downarrow (i \to j)$ bzw. $w \uparrow (i \to j)$ den zu $\mathrm{w} = (i \to i_1 \to \cdots \to i_m \to j) \in KQ$ korrespondierenden Weg aus $A = KQ/\mathrm{I}$, wenn $i \lhd i_1 \lhd \cdots \lhd i_m \lhd j$ bzw. $i \rhd i_1 \rhd \cdots \rhd i_m \rhd j$. Diese Wege sind keine 0-Wege und es gilt $\langle w_1 \downarrow (i \to j)\rangle = \langle w_2 \downarrow (i \to j)\rangle$ bzw. $\langle w_1 \uparrow (i \to j)\rangle = \langle w_2 \uparrow (i \to j)\rangle$.
  Für $i, j \in Q_0$ mit $i \leqslant j$ verwenden wir die Bezeichnung $w_i^{(j)}$ für einen Weg der Form $w \downarrow (i \to j) \cdot w \uparrow (n \to i)$. Analog dazu erzeugen zwei Wege von der Form $w_i^{(j)}$ den gleichen Untermodul von $P(n)$. Insbesondere gilt $\left\langle w \downarrow (j \to k) \cdot w_i^{(j)} \right\rangle = \left\langle w_i^{(k)} \right\rangle$ für alle $i, j, k \in Q_0$ mit $i \leqslant j \leqslant k$.

- Sei $w_i^{(j)}$ ein oben definierter Weg. Die Menge $\mathbf{B}(n) = \left\{ w_i^{(j)} \mid i, j \in Q_0,\ i \in \Lambda^{(j)} \right\}$ ist eine Basis von $P(n)$. Die Elemente aus $\left\{ w_i^{(j)} \mid i \in \Lambda^{(j)} \right\}$ bilden eine Basis von $P(n)_j$ und die Elemente aus $\bigcup_{i \in \Lambda^{(j)}} \left\{ w_k^{(j)} \mid k \in \Lambda_{(i)} \right\}$ bilden eine Basis von $P(j)$. Insbesondere gilt $P(j)_i = P(i)_i$ für alle $i \in \Lambda^{(j)}$.
  Zudem gilt besonders $P(j) = \left\langle w_j^{(j)} \right\rangle$ und $\Delta(j) = \left\langle w_1^{(j)} \right\rangle$ für alle $j \in Q_0$.

- Für jedes $j \in Q_0$ existiert genau ein Untermodul von $P(n)$, der zu $P(j)$ isomorph ist. Wir betrachten jeden projektiven unzerlegbaren A-Modul als einen Untermodul von $P(n)$ und bezeichnen mit ι_j die Inklusion $P(j) \hookrightarrow P(n)$ mit $w_j^{(j)} \mapsto w_j^{(j)}$.
  Nach dem Lemma 3.4 (Kap. 1) ist jeder lokale Untermodul U von $P(n)$ mit $\mathrm{top} U \cong S(j)$ ein Untermodul von $P(j)$, d.h. $P(n)_j = P(j)_j$ und damit für jeden Endomorphismus F von $P(n)$ ist $F(w_j^{(j)}) \in P(n)_j$ ein Element aus $P(j)$ oder anders gesagt $F(P(j)) \subseteq P(j)$.
  Wir erhalten, dass $P(j)$ F-invariant für jeden $F \in \mathrm{End}_A(P(n))$ ist.

- Für alle $i \in \Lambda^{(j)}$ gilt $U \subseteq \left\langle w_i^{(j)} \right\rangle$ für alle $U \in \mathbf{Lok}(P(i) \mid S(j))$, d.h. $P(i)_j = \left\langle w_i^{(j)} \right\rangle_j$.
  Wenn für ein $u \in P(i)_j$ gilt $\langle u \rangle \neq \left\langle w_i^{(j)} \right\rangle$, dann erhalten wir $u \in \mathrm{rad} \left\langle w_i^{(j)} \right\rangle_j =$

$$\mathrm{span}_K \left\{ w_{i'}^{(j)} \mid i' \in \Lambda^{(i)} \setminus \{i\} \right\}.$$

Für den weiteren Verlauf dieses Kapitels fixieren wir für alle $i, j \in Q_0$ mit $i \leqslant j$ jeweils einen steigenden bzw. fallenden Weg $w \uparrow (j \to i)$ bzw. $w \downarrow (i \to j)$ in A.

Wie bereits erwähnt, induziert eine Basis von $P(n)_j$ eine Basis von $\mathrm{Hom}_A(P(j), P(n))$. Weiter betrachten wir hauptsächlich die von der Basis $\left\{ w_j^{(n)} \mid j \in Q_0 \right\}$ von $P(n)_n$ induzierte Basis von $\mathrm{End}_A(P(n))$. Für den zu $w_j^{(n)}$ gehörigen Endomorphismus verwenden wir zur leichteren Handhabung ab nun die Kurzform $\mathfrak{f}_j$ statt $F_{w_j^n}$. Es gilt also:

$$\mathfrak{f}_j : P(n) \to P(n) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{f}_j(e_n) = w_j^{(n)}.$$

Der nächste Satz zeigt, dass die von den Elementen aus $\mathbf{B}(n)$ erzeugten $\mathrm{End}_A(P(n))$-Moduln die unzerlegbaren Summanden von ${}_{\mathrm{End}_A(P(n))}P(n)$ sind.

Satz 2.1. *Sei $A = KQ/I$ eine 1-quasi-erbliche Algebra, $\{n\} = \{(Q_0, \leqslant)\}$ und $\mathfrak{f}_j$ ein oben definierter Endomorphismus von $P(n)$ für jedes $j \in Q_0$. Als Modul über seiner Endomorphismen-Algebra hat $P(n)$ folgende Zerfällung in unzerlegbare Faktoren:*

$$_{End_A(P(n))}P(n) \cong \bigoplus_{j \in Q_0} End_A(P(n)) \circ \mathfrak{f}_j$$

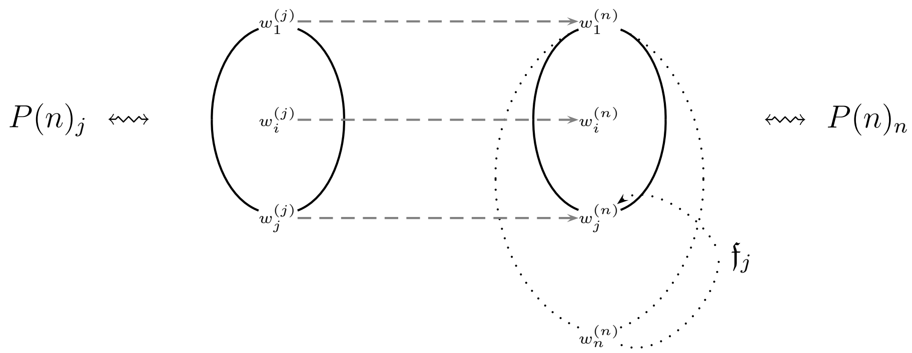
Der Beweis dieses Satzes basiert darauf, dass die $\mathrm{End}_A(P(n))$-Moduln $\mathrm{End}_A(P(n)) \circ \mathfrak{f}_j$ und $\mathrm{Hom}_A(P(j), P(n))$ isomorph sind. Dies folgt aus einigen Eigenschaften der Elemente $w \downarrow (j \to n) \cdot w \uparrow (n \to j)$, die wir nachfolgend betrachten.

Lemma 2.2. *Seien $i, j \in Q_0$ mit $i \in \Lambda^{(j)}$, $c \in K^*$ und $a = c \cdot w \downarrow (j \to n) + \mathtt{r}$, wobei $\mathtt{r} \in span_K \{w \in A \mid \mathtt{s}(w) = j,\ \mathtt{e}(w) = n,\ w \neq w \downarrow (j \to n)\}$. Dann sind die Elemente aus $\left\{ a \cdot w_i^{(j)} \mid i \in \Lambda^{(j)} \right\}$ linear unabhängig.*
Insbesondere gilt $span_K \left\{ a \cdot w_i^{(j)} \mid i \in \Lambda^{(j)} \right\} = span_K \left\{ w_i^{(n)} \mid i \in \Lambda^{(j)} \right\} = P(j)_n$.

Beweis. Die Menge der Elemente von der Form $w \downarrow (i \to n) \cdot w \uparrow (n \to i)$ bezeichnen wir hier mit $W(i)$. Wie bereits erwähnt, gilt $\langle w_1 \rangle = \langle w_2 \rangle$ für alle $w_1, w_2 \in W(i)$. Da $w \downarrow (j \to n) \cdot w_i^{(j)} \in W(i)$ erhalten wir $w \downarrow (j \to n) \cdot w_i^{(j)} = \lambda_i \cdot w_i^{(n)} + r_i$ für ein $\lambda_i \in K^*$ und $r_i \in \left(\mathrm{rad} \left\langle w_i^{(n)} \right\rangle\right)_n$. Außerdem gilt $\mathtt{r} \cdot w_i^{(j)} \in \left(\mathrm{rad} \left\langle w_i^{(n)} \right\rangle\right)_n$, denn $\mathtt{r} \cdot w_i^{(j)} \in P(i)_n$ und alle Elemente aus $P(i)_n$ liegen in $\left\langle w_i^{(n)} \right\rangle_n$, deshalb folgt aus $\mathtt{r} \cdot w_i^{(j)} \notin W(i)$ also $\mathtt{r} \cdot w_i^{(j)} \in \left(\mathrm{rad} \left\langle w_i^{(n)} \right\rangle\right)_n$. Es existiert damit für jedes $i \in \Lambda^{(j)}$ ein $c_i \in K^*$ und $\widetilde{w}_i \in \mathrm{span}_K \left\{ w_{i'}^{(n)} \mid i' \in \Lambda^{(i)} \setminus \{i\} \right\}$ mit $a \cdot w_i^{(j)} = c_i \cdot w_i^{(n)} + \widetilde{w}_i$. Weil $\left\{ w_i^{(n)} \mid i \in \Lambda^{(j)} \right\}$ eine Basis von $P(j)_n$ ist, ist auch die Menge $\left\{ a \cdot w_i^{(j)} \mid i \in \Lambda^{(j)} \right\}$ eine Basis von $P(j)_n$ (nach dem Austauschlemma). □

Im nachfolgenden Bild ist die Aussage der Lemma veranschaulicht: Die Ellipse links im Bild steht für den K-Vektorraum $P(n)_j$. Jedes von Null verschiedene Element aus $P(n)_j$

erzeugt einen Modul aus $\mathbf{Lok}(P(n) \mid S(j))$ und damit gilt $P(n)_j = P(j)_j$. Aus den Betrachtungen im letzten Kapitel wissen wir, dass $\left\{w_i^{(j)} \mid i \in \Lambda^{(j)}\right\}$ eine Basis von $P(n)_j$ für jedes $j \in Q_0$ ist und mit der Halbordnungsrelation $\subseteq$ entspricht das Diagramm von $\left(\left\{w_i^{(j)} \mid i \in \Lambda^{(j)}\right\}, \subseteq\right)$ dem Diagramm von $\left(\Lambda^{(j)}, \leqslant\right)$. Im Bild rechts ist nach dem gleichen Muster der K-Vektorraum $P(n)_n$ visualisiert (große Ellipse). Die kleine Ellipse, eingebettet in der großen Ellipse, steht für die Menge $\left\{w_i^{(n)} \mid i \in \Lambda^{(j)}\right\}$. Die lineare Hülle dieser Elemente ist der Vektorraum $P(j)_n$. Aus dem letzten Lemma folgt, dass $a = c \cdot w \downarrow (j \to n) + \mathtt{r}$ einen K-Vektorraum Isomorphismus $P(j)_j \longrightarrow P(j)_n$ mit $u \mapsto a \cdot u$ definiert. Außerdem gilt $\left\langle a \cdot w_i^{(j)}\right\rangle = \left\langle w_i^{(n)}\right\rangle$ für alle $i \in \Lambda^{(j)}$. Dies wird durch gestrichelte (graue) Pfeile symbolisiert. Der punktierte Pfeil deutet auf die Operation von $\mathfrak{f}_j$ auf $w_n^{(n)} = e_n$ hin, es gilt also $\mathfrak{f}_j(e_n) = w_j^{(n)}$.



Das nächste Lemma sagt, dass die Menge $\left\{\mathfrak{f}_i \mid i \in \Lambda^{(j)}\right\}$ eine Basis des von $\mathfrak{f}_j$ erzeugten (links)Ideals von $\mathrm{End}_A(P(n)$ ist, anders gesagt für jeden $F \in \mathrm{End}_A(P(n))$ ist das Element $F(w_j^{(n)})$ eine lineare Kombination von Elementen aus $\left\{w_i^{(n)} \mid i \in \Lambda^{(j)}\right\}$ (diese Elemente befinden sich in der kleinen Ellipse im rechten Teil des letzten Bildes).

Lemma 2.3. *Für jedes $j \in Q_0$ gilt $\mathit{End}_A(P(n)) \circ \mathfrak{f}_j = \left\{f_u \mid u \in \mathit{span}_K \left\{w_i^{(n)} \mid i \in \Lambda^{(j)}\right\}\right\}$.*

Beweis. Sei $F \in \mathrm{End}_A(P(n))$, dann $(F \circ \mathfrak{f}_j)(e_n) = F(w_j^{(n)}) \in P(j)_n$, denn $w_j^{(n)} \in P(j)$ und für jeden $F \in \mathrm{End}_A(P(n))$ ist $P(j)$ F-invariant. Es gilt $P(j)_n = \mathrm{span}_K \left\{w_i^{(n)} \mid i \in \Lambda^{(j)}\right\}$ und damit $F \circ \mathfrak{f}_j = f_u$ für ein $u \in \mathrm{span}_K \left\{w_i^{(n)} \mid i \in \Lambda^{(j)}\right\}$. □

Der von $\mathfrak{f}_j$ erzeugte $\mathrm{End}_A(P(n))$-Modul ist offensichtlich lokal, aus der Unzerlegbarkeit von $P(n)$ erhalten wir, dass $\mathrm{End}_A(P(n))$ eine lokale K-Algebra ist. Das nächste Lemma zeigt, dass der $\mathrm{End}_A(P(n))$-Modul $\mathrm{Hom}_A(P(i), P(n))$ ein lokaler und damit unzerlegbarer Modul ist. Nach den Erläuterungen am Anfang dieses Abschnitts erhalten wir, dass $\mathrm{Hom}_A(P(i), P(n))$ für jedes $i \in Q_0$ die unzerlegbaren direkten Summanden von $P(n)$ als $\mathrm{End}_A(P(n))$-Modul sind.

Lemma 2.4. *Sei $A = KQ/I$ eine 1-quasi-erbliche Algebra mit $\{n\} = \max\{(Q_0, \leqslant)\}$ und $\mathfrak{f}_j \in \mathit{End}_A(P(n))$ mit $\mathfrak{f}_j(e_n) = w_j^{(n)}$. Sei $\iota_j : P(j) \to P(n)$ mit $\iota_j(w_j^{(j)}) = w_j^{(j)}$ die kanonische*

Inklusion. Die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & End_A(P(n)) \circ \mathfrak{f}_j & \longrightarrow & Hom_A(P(j), P(n)) \\ & F \circ \mathfrak{f}_j & \mapsto & \Phi(F \circ \mathfrak{f}_j) = F \circ \iota_j \end{array}$$

ist ein $End_A(P(n))$-Modul Isomorphismus.

Beweis. Seien $F, G \in \mathrm{End}_A(P(n))$ und $F \circ \mathfrak{f}_j = G \circ \mathfrak{f}_j$, d.h. $F(w_j^{(n)}) = G(w_j^{(n)})$. Aus $\left\langle w_j^{(n)} \right\rangle \subseteq \left\langle w_j^{(j)} \right\rangle = P(j)$ folgt, dass ein Element $a \in A$ mit $a \cdot w_j^{(j)} = w_j^{(n)}$ existiert. Die letzten Betrachtungen zeigen, dass für a Folgendes gilt: Es existiert ein $c \in K^*$ und ein $\mathtt{r} \in \{w \in A \mid \mathtt{s}(w) = j,\ \mathtt{e}(w) = i,\ w \neq w \downarrow (j \to n)\}$ mit $a = c \cdot w \downarrow (j \to n) + \mathtt{r}$. Damit gilt also $a \cdot F(w_j^{(j)}) = a \cdot G(w_j^{(j)})$. Da $F(w_j^{(j)}), G(w_j^{(j)}) \in P(j)_j$, existieren $\lambda_i, \mu_i \in K$ mit $F(w_j^{(j)}) = \sum_{i \in \Lambda^{(j)}} \lambda_i \cdot w_i^{(j)}$ und $G(w_j^{(j)}) = \sum_{i \in \Lambda^{(j)}} \mu_i \cdot w_i^{(j)}$. Somit erhalten wir $a \cdot \left(\sum_{i \in \Lambda^{(j)}} \lambda_i \cdot w_i^{(j)} \right) = a \left(\sum_{i \in \Lambda^{(j)}} \mu_i \cdot w_i^{(j)} \right)$ und damit gilt $\sum_{i \in \Lambda^{(j)}} \lambda_i \cdot \left(a \cdot w_i^{(j)} \right) = \sum_{i \in \Lambda^{(j)}} \mu_i \cdot \left(a \cdot w_i^{(j)} \right)$. Nach Lemma 2.2 sind die Elemente $\left\{ a \cdot w_i^{(j)} \mid i \in \Lambda^{(j)} \right\}$ linear unabhängig und damit folgt aus der letzten Gleichung $\lambda_i = \mu_i$ für alle $i \in \Lambda^{(j)}$, d.h. es gilt $F(w_j^{(j)}) = G(w_j^{(j)})$ und damit $(F \circ \iota_j)(w_j^{(j)}) = (G \circ \iota_j)(w_j^{(j)})$. Wir haben gezeigt, dass aus $F \circ \mathfrak{f}_j = G \circ \mathfrak{f}_j$ die Gleichung $F \circ \iota_j = G \circ \iota_j$ folgt, d.h. Φ ist wohldefiniert.
Klar ist, dass Φ ein $\mathrm{End}_A(P(n))$-Homomorphismus ist, denn für alle $G \in \mathrm{End}_A(P(n))$ gilt $\Phi(G \circ F \circ \mathfrak{f}_j) = G \circ \Phi(F \circ \mathfrak{f}_j)$. Außerdem ist der Funktor $\mathrm{Hom}_A(-, P(n))$ wegen $P(n) \cong I(n)$ kontravariant exakt und für die exakte Sequenz $0 \to P(j) \xrightarrow{\iota_j} P(n) \to P(n)/P(j) \to 0$ ist die Folge $0 \to \mathrm{Hom}_A(P(n)/P(j), P(n)) \to \mathrm{Hom}_A(P(n), P(n)) \to \mathrm{Hom}_A(P(j), P(n)) \to 0$ exakt. Für jedes $f \in \mathrm{Hom}_A(P(i), P(n))$ existiert also ein $F \in \mathrm{End}_A(P(n))$ mit $F \circ \iota_j = f$, d.h. Φ ist surjektiv. Damit gilt $\dim_K(\mathrm{End}_A(P(n)) \circ \mathfrak{f}_j) \geq \dim_K(\mathrm{Hom}_A(P(j), P(n))) = \left|\Lambda^{(j)}\right|$. Andererseits folgt aus Lemma 2.3 demnach $\dim_K(\mathrm{End}_A(P(n)) \circ \mathfrak{f}_j) \leq \left|\Lambda^{(j)}\right|$ und damit gilt $\dim_K(\mathrm{End}_A(P(n)) \circ \mathfrak{f}_j) = \dim_K(\mathrm{Hom}_A(P(j), P(n))) = \left|\Lambda^{(j)}\right|$. □

Beweis des Satzes. Wie bereits bekannt, zerfällt $P(n)$ als ein K-Vektorraum in eine direkte Summe von den zu $j \in Q_0$ korrespondierenden Unterräumen $P(n)_j$, d.h. $P(n) \cong \bigoplus_{j \in Q_0} P(n)_j$. Diese Unterräume können als $\mathrm{End}_A(P(n))$-Modul betrachtet werden und zwar gilt $P(n)_j \cong \mathrm{Hom}_A(P(j), P(n))$. Nach dem Lemma 2.4 ist $\mathrm{Hom}_A(P(j), P(n))$ ein lokaler $\mathrm{End}_A(P(n))$-Modul und damit unzerlegbar.
Als Modul über seiner Endomorphismen-Algebra hat $P(n)$ folgende Zerfällung in unzerlegbare Faktoren: ${}_{\mathrm{End}_A(P(n))}P(n) \cong \bigoplus\limits_{j \in Q_0} \mathrm{End}_A(P(n)) \circ \mathfrak{f}_j$. □

3.3 Eine Basis von $\mathrm{End}_A(P(n))$ mit der Eigenschaft $\boxed{\preccurlyeq}$

Wir definieren nun eine Basis von lokalen selbstinjektiven Algebren, die bereits [DHM] im Zusammenhang mit kommutativen Algebren betrachtet wurde. Die Menge der Paare $(L, \mathfrak{L})$ bezeichnen wir mit $\mathbf{Y}$, wobei L eine endlich dimensionale, lokale,selbstinjektive Algebra und $\mathfrak{L}$ eine ebensolche Basis von L ist. Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, dass das Paar bestehend aus $(\mathrm{End}_A P(n))$ und $\{\mathfrak{f}_j \mid j \in Q_0\}$ ein Element von $\mathbf{Y}$ ist.

Definition 3.1. Sei L eine endlich dimensionale, lokale, selbstinjektive K-Algebra ($\dim_K L = n$) und $\mathfrak{L} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von L mit $L = \langle b_n \rangle$ und $\preccurlyeq$ ist eine Halbordnungsrelation auf $\mathfrak{L}$ mit $b_1 \preccurlyeq b_i \preccurlyeq b_n$ für alle $i \in [1, n]$. Wenn

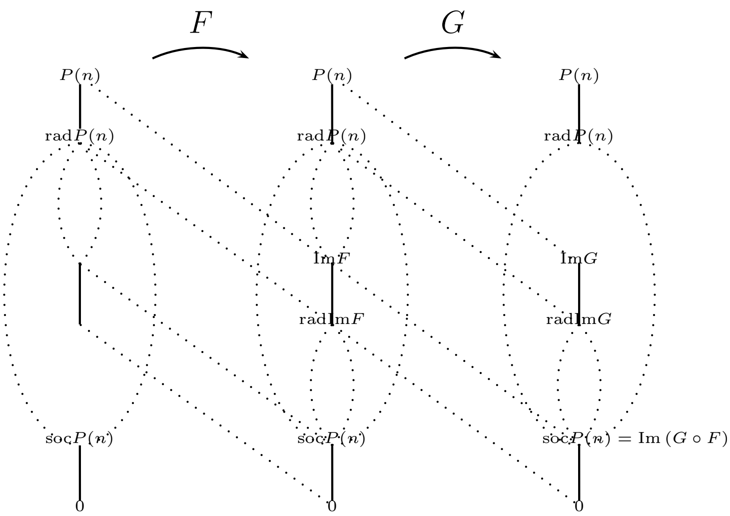
$$\mathrm{rad}\,\langle b_j \rangle = \sum_{\substack{b_i \in \mathfrak{L} \\ b_i \prec b_j}} \langle b_i \rangle$$

für alle $b_j \in \mathfrak{L}$, dann bezeichnen wir diese Eigenschaft mit $\boxed{\preccurlyeq}$.

Bemerkung 3.2. Erfüllt eine Basis $\mathfrak{L} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ einer lokalen selbstinjektiven Algebra L die Eigenschaft $\boxed{\preccurlyeq}$, dann gilt $\langle b_1 \rangle = \mathrm{soc}L$. Nach der Definition 3.1 gilt $\mathrm{rad}\,\langle b_1 \rangle = 0$ und weil $b_1 \neq 0$, ist er (bis auf einen Skalar) der einzige lokale Untermodul von $_L L$ mit dieser Eigenschaft.

Lemma 3.3. *Sei $(A = KQ/I, \leqslant)$ eine 1-quasi-erbliche Algebra und $\{n\} = \max\{(Q_0, \leqslant)\}$. Die Algebra $\mathrm{End}_A(P(n))$ ist endlich dimensional, lokal und selbstinjektiv.*

Beweis. Die Algebra $\mathrm{End}_A(P(n))$ ist endlich dimensional, denn $\dim_K \mathrm{End}_A(P(n)) = \dim_K P(n)_n = n$. Außerdem ist sie lokal, denn $P(n)$ ist unzerlegbar.
Wir betrachten nun den von $\mathfrak{f}_1$ erzeugten Untermodul von $\mathrm{End}_A(P(n))$-Modul $\mathrm{End}_A(P(n))$: Da $\mathrm{Im}\mathfrak{f}_1 = \left\langle w_1^{(n)} \right\rangle = \mathrm{soc}P(n)$ erhalten wir $F \circ \mathfrak{f}_1 = 0$ für jeden $F \in \mathrm{End}_A(P(n))$ der kein Automorphismus von $P(n)$ ist, denn $\mathrm{Ker}F$ ist ein echter Untermodul von $P(n)$ und damit gilt $\mathrm{soc}P(n) \subseteq \mathrm{Ker}F$. Der Modul $\mathrm{End}_A(P(n)) \circ \mathfrak{f}_1 = \langle \mathfrak{f}_1 \rangle$ ist somit ein einfacher Untermodul von $\mathrm{End}_A(P(n))$. Nun zeigen wir, dass $\langle \mathfrak{f}_1 \rangle$ der einzige einfache Untermodul von $\mathrm{End}_A(P(n))$ ist und damit $\mathrm{soc}\mathrm{End}_A(P(n)) = \langle \mathfrak{f}_1 \rangle$.
Zu zeigen ist also, dass $\langle \mathfrak{f}_1 \rangle$ ein Untermodul jedes lokalen Untermoduls von $\mathrm{End}_A(P(n))$ ist, d.h. für jeden $F \in \mathrm{End}_A(P(n)) \setminus \{0\}$ gilt $\langle \mathfrak{f}_1 \rangle \subseteq \langle F \rangle$, oder anders gesagt, für jeden $F \in \mathrm{End}_A(P(n)) \setminus \{0\}$ gibt es ein $G \in \mathrm{End}_A(P(n))$ mit $\langle G \circ F \rangle = \langle \mathfrak{f}_1 \rangle$. Dies ist gleichbedeutend mit $\mathrm{Im}\,(G \circ F) = \mathrm{Im}\mathfrak{f}_1 = \mathrm{soc}P(n)$. Im Bild unten sind diese Erläuterungen visualisiert:
Ein Endomorphismus F von $P(n)$ bildet das $P(n)$ erzeugende Element e_n auf $F(e_n)$. Es gilt offensichtlich $\mathrm{Im}F = \langle F(e_n) \rangle$, $\mathrm{Im}F$ ist ein lokaler Untermodul von $P(n)$ und $\mathrm{radIm}F = F\,(\mathrm{rad}P(n))$. Insbesondere gilt $P(n)/\mathrm{Ker}F \cong \mathrm{Im}F$. Und nun ist zu zeigen, dass ein Endomorphismus G von $P(n)$ existiert, der das Element $F(e_n)$ auf $c \cdot w_i^{(n)}$ abbildet, d.h. $G(F(e_n))$ erzeugt den Sockel von $P(n)$ oder anders gesagt $\mathrm{Im}\,(G \circ F) = \mathrm{soc}P(n)$. In diesem Fall gilt dann $G(\mathrm{radIm}F) = 0$.
Dies repräsentiert die Unterverbände von $P(n)$.



Sei nun $F \in \mathrm{End}_A(P(n))$ mit $F \neq 0$ und $\widetilde{f}$ die von F induzierte Abbildung $\widetilde{f} : P(n) \to \mathrm{Im}f$

mit $\widetilde{f}(p) = F(p)$. Der Untermodul $\mathrm{Im}F$ von $P(n)$ ist ein lokaler A-Modul mit $\mathrm{topIm}F \cong S(n)$, somit existiert eine Surjektion $\mathrm{Im}F \overset{\widetilde{g}}{\twoheadrightarrow} S(n)$. Der Modul $P(n) \cong I(n)$ ist eine injektive Hülle von $P(n)$, $\mathrm{Im}F$ und $S(n)$, denn alle drei Moduln haben einen zu $S(n)$ isomorphen Sockel. Es existiert ein Endomorphismus $G \in \mathrm{End}_A(P(n))$, so dass die folgenden Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} P(n) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathrm{Im}F & \xrightarrow{\widetilde{g}} & S(n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P(n) & \xrightarrow{F} & P(n) & \xrightarrow{G} & P(n) \end{array}$$

kommutieren. Damit gilt $\mathrm{Im}\left(\widetilde{g} \circ \widetilde{f}\right) = \mathrm{Im}\,(G \circ F) \cong S(n)$. Daraus folgt $\mathrm{Im}\,(G \circ F) = \mathrm{soc}P(n) = \left\langle w_1^{(n)} \right\rangle$ und damit gilt $\langle G \circ F \rangle = \langle f_1 \rangle$. □

Bemerkung 3.4. Aus den letzten Betrachtungen folgt nicht unbedingt, dass für zwei nicht isomorphe 1-quasi-erbliche Algebren A und A' auch die Endomorphismen-Algebren $\mathrm{End}_A(P(n_A))$ und $\mathrm{End}_{A'}(P(n_{A'}))$ nicht isomorph sein muss. Beispiele dafür werden im Abschnitt 1.5 gegeben.

Für eine 1-quasi-erbliche K-Algebra $(A = KQ/\mathrm{I}, \leqslant)$ bezeichnen wir $L(A) := \mathrm{End}_A(P(n))$ für $\{n\} = \max\{(Q_0, \leqslant)\}$ und mit $\mathfrak{L}(A)$ bezeichnen wir eine aus den Endomorphismen $\mathfrak{f}_j$ hier $j \in Q_0$, bestehende Basis von $\mathrm{End}_A(P(n))$. Wir zeigen nun, dass mit der Halbordnungsrelation "$\mathfrak{f}_i \prec \mathfrak{f}_j$ genau dann wenn $\langle \mathfrak{f}_i \rangle \subset \langle \mathfrak{f}_j \rangle$" die Eigenschaft $\boxed{\preccurlyeq}$ erfüllt ist.

Lemma 3.5. *Für eine 1-quasi-erbliche Algebra A seien $L(A)$, $\mathfrak{L}(A)$ wie oben und $(\mathfrak{L}(A), \leqslant)$ ist eine Halbordnung mit*

$$\mathfrak{f}_{i'} < \mathfrak{f}_i \text{ genau dann, wenn } i' < i.$$

Es gilt:

(a) $L(A) \circ \mathfrak{f}_i$ ist ein lokaler Untermodul von $L(A)$,

(b) $L(A) \circ \mathfrak{f}_i \subset L(A) \circ \mathfrak{f}_j$, wenn $i < j$,

(c) $\mathit{rad}\,(L(A) \circ \mathfrak{f}_j) = \sum_{\substack{i \in Q_0 \\ i<j}} L(A) \circ \mathfrak{f}_i$.

Beweis. (a) Die Algebra $L(A)$ ist lokal, damit erzeugt jedes Element aus $L(A)$ ein lokales Ideal, demnach sind $L(A) \circ \mathfrak{f}_i$ lokal für jedes $i \in Q_0$.
(b) Nach dem Lemma 2.3 ist $\left\{\mathfrak{f}_i \mid i \in \Lambda^{(j)}\right\}$ eine Basis von $L(A) \circ \mathfrak{f}_j$. Damit ist der von $\mathfrak{f}_i$ erzeugter $L(A)$-Modul $L(A) \circ \mathfrak{f}_i$ ein Untermodul von $L(A) \circ \mathfrak{f}_j$ für alle $i \in \Lambda^{(j)}$.
(c) Aus $\dim_K \left((L(A) \circ \mathfrak{f}_j)/\left(\sum_{i \in \Lambda^{(j)} \setminus \{j\}} L(A) \circ \mathfrak{f}_i\right)\right) = 1$ folgt offensichtlich $\mathrm{rad}\,(L(A) \circ \mathfrak{f}_j) = \sum_{\substack{i \in Q_0 \\ i<j}} L(A) \circ \mathfrak{f}_i$. □

Bemerkung 3.6. Die Basis $\mathfrak{L}(A)$ ist eine nicht eindeutig bestimmte Basis von $L(A)$, die die Eigenschaft $\boxed{\preccurlyeq}$ hat.

3.4 Doppelt zentrierende Eigenschaften

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass für eine 1-quasi-erbliche Algebra A und den projektiven, injektiven A-Modul $P(n)$ die sogenannten doppelt zentrierenden Eigenschaften (double centralizer properties) gelten, d.h. für $B := \mathrm{End}_A(P(n))$ gilt $A \cong \mathrm{End}_B({}_BP(n))$.
Dazu beziehen wir uns auf [KSX].

An dieser Stelle sei an den Begriff "dominante Dimension" erinnert, den wir in diesem Abschnitt verwenden: Für zwei $\mathcal{A}$-Moduln $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ ist die *dominante Dimension von* $\mathcal{M}$ *bezüglich* $\mathcal{N}$ das Supremum von allen $m \in \mathbb{N}$, für das eine exakte Folge $0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2 \to \cdots \to \mathcal{N}_m$ mit $\mathcal{N}_i \in \mathrm{add}(\mathcal{N})$ für alle $i \in [1, m]$ existiert. Dies wird mit $\mathcal{N} - \mathrm{dom.dim}(\mathcal{M})$ bezeichnet. Mit $\mathcal{N} - \mathrm{dom.dim}(\mathcal{A})$ bezeichnen wir die dominante Dimension von ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ bezüglich $\mathcal{N}$.
Existiert eine exakte Folge $0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2 \to \cdots \to \mathcal{N}_m$ mit $\mathcal{N}_i \in \mathrm{add}(\mathcal{N})$ für alle $i \in [1, m]$, dann gilt $\mathcal{N} - \mathrm{dom.dim}(\mathcal{M}) \geq m$.

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist der folgende

Satz 4.1. *Sei* $(A = KQ/I, \leqslant)$ *eine 1-quasi-erbliche Algebra,* $\{n\} = \max\{(Q_0, \leqslant)\}$ *und* $\mathfrak{L}(A) = \{\mathfrak{f}_j \mid j \in Q_0\}$ *die im Abschnitt 2 beschriebene Basis von* $End_A(P(n))$*. Es gilt*

$$A \cong End_{End_A(P(n))}\left(\bigoplus_{j \in Q_0} (End_A(P(n)) \circ \mathfrak{f}_j)\right).$$

Der Beweis für diesen Satz basiert auf dem folgenden Theorem von Tachikawa [T]: Sei $\mathcal{A}$ eine QF-3 Algebra und $\mathcal{M}$ ist ein minimaler treuer $\mathcal{A}$-Modul. Dann gilt:

$$\mathcal{M} - \mathrm{dom.dim}\,(\mathcal{A}) \geq 2 \quad \text{genau dann, wenn } \mathcal{A} \cong \mathrm{End}_{\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})}\left({}_{\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})}\,(\mathcal{M})\right)$$

Zur Erinnerung: Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt QF-3, wenn ein treuer $\mathcal{A}$-Modul existiert, der projektiv und injektiv ist. Aus der Definition einer 1-quasi-erblichen Algebra A folgt, dass der projektive A-Modul $P(n)$ injektiv und treu ist. Aus der Unzerlegbarkeit von $P(n)$ folgt, dass $P(n)$ ein minimaler treuer A-Modul ist. Für $P(n)$ als $\mathrm{End}_A(P(n))$-Modul gilt nach dem Satz 2.1 nun ${}_{\mathrm{End}_A(P(n))}P(n) \cong \bigoplus_{j \in Q_0} (\mathrm{End}_A(P(n)) \circ \mathfrak{f}_j)$. Für den Beweis des Satzes 4.1 reicht es also, $P(n) - \mathrm{dom.dim}(A) \geq 2$ zu zeigen.

Für den Beweis des folgenden Lemmas berücksichtigen wir die Tatsache, dass der Sockel von $P(n)/P(j)$ eine Summe von Kopien von $S(n)$ ist. Dies wurde bereits in 4.2 (Kap. 2) betrachtet.

Lemma 4.2. *Für eine 1-quasi-erbliche Algebra* $(A = KQ/I, \leqslant)$ *mit* $\{n\} = \max\{(Q_0, \leqslant)\}$ *gilt*

$$P(n) - dom.dim(A) \geq 2.$$

Beweis. Zu zeigen ist also, dass für gewisse $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ eine exakte Folge existiert:

$$0 \to A \to P(n)^{r_1} \to P(n)^{r_2}.$$

Da A basisch ist, gilt für sie als A-Modul $A = \bigoplus_{j\in Q_0} P(j)$. Wie bereits bekannt gilt $P(j) \overset{\iota_j}{\hookrightarrow} P(n)$ für alle $j \in Q_0$ und damit ist $\bigoplus_{j\in Q_0} P(j) \xrightarrow{F_1} P(n)^n$ mit $F_1 = (\iota_j)_{j\in Q_0}$ eine Inklusion (es gilt $n = |Q_0|$). Aus den Eigenschaften von direkten Summen erhalten wir

$$\operatorname{soc}(P(n)^n/\mathrm{Im}F_1) \cong \bigoplus_{j\in Q_0} \operatorname{soc}(P(n)/\mathrm{Im}(\iota_j)) = \bigoplus_{j\in Q_0} \operatorname{soc}(P(n)/P(j)) \in \operatorname{add}(S(n)).$$

Da es hier um endlich dimensionale Moduln geht, existiert damit ein $r_2 \in \mathbb{N}$, so dass gilt $\operatorname{soc}(P(n)^n/\mathrm{Im}F_1) \cong S(n)^{r_2}$. Aus $P(n) \cong I(n)$ folgt, dass $P(n)^{r_2}$ eine injektive Hülle von $P(n)^n/\mathrm{Im}F_1$ ist, d.h. es existiert eine injektive Abbildung $P(n)^n/\mathrm{Im}F_1 \overset{G}{\hookrightarrow} P(n)^{r_2}$. Sei nun $F_2 := (G \circ \mathrm{pr}) : P(n)^n \overset{\mathrm{pr}}{\twoheadrightarrow} P(n)^n/\mathrm{Im}F \overset{G}{\hookrightarrow} P(n)^{r_2}$, dann ist die Folge $0 \to A \xrightarrow{F_1} P(n)^n \xrightarrow{F_2} P(n)^{r_2}$ exakt. Somit gilt $P(n) - \mathrm{dom.dim}(A) \geq 2$. $\square$

Beweis des Satzes. Die Voraussetzungen des Theorems von Tachikawa sind somit für eine 1-quasi-erbliche Algebra A und $P(n)$ erfüllt. Es gilt also $A \cong \mathrm{End}_{\mathrm{End}_A(P(n))}(P(n))$ und aus dem Satz 2.1 folgt $A \cong \mathrm{End}_{\mathrm{End}_A(P(n))}\left(\bigoplus_{j\in Q_0} (\mathrm{End}_A(P(n)) \circ \mathfrak{f}_j)\right)$. $\square$

(Ist auf einer Menge $\mathbf{M}$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert, dann bezeichnen wir mit $\mathbf{M}/\sim$ die Menge der Repräsentanten der Äquivalenzklassen auf $\mathbf{M}$ bezüglich $\sim$)

Mit $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{Z}$ bezeichnen wir folgende Mengen:

$$\mathbf{X} := \{A \mid A \text{ ist eine 1-quasi-erbliche } K\text{-Algebra}\} / \sim_{\mathbf{X}};$$

hier gilt $A \sim_{\mathbf{X}} A'$ genau dann, wenn $A \cong A'$.

$$\mathbf{Y} := \left\{ (L, (\mathfrak{L}, \preccurlyeq)) \;\middle|\; \begin{array}{l} L \text{ ist eine lokale, selbstinjektive } K\text{-Algebra,} \\ \dim_K L < \infty \text{ und } \mathfrak{L} = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\} \text{ ist eine Basis} \\ \text{von } L \text{ mit } \operatorname{rad}\langle \mathfrak{b}_j\rangle = \sum_{i\prec j} \langle \mathfrak{b}_i\rangle \text{ und } \langle \mathfrak{b}_n\rangle = L \end{array} \right\} / \sim_{\mathbf{Y}};$$

hier $(L, (\mathfrak{L}, \preccurlyeq)) \sim_{\mathbf{Y}} (L', (\mathfrak{L}', \preccurlyeq'))$ genau dann, wenn ein K-Algebren Isomorphismus $\psi : L \longrightarrow L'$ existiert, so dass für jedes $\mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$ ein $\mathfrak{b}' \in \mathfrak{L}'$ existiert, mit $\psi(\langle \mathfrak{b}\rangle) \cong \langle \mathfrak{b}'\rangle$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{End}_L\left(\bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{L}} \langle \mathfrak{b}\rangle\right) \cong \mathrm{End}_{L'}\left(\bigoplus_{\mathfrak{b}'\in\mathfrak{L}'} \langle \mathfrak{b}'\rangle\right)$.

$$\mathbf{Z} := \left\{ \mathrm{End}_L\left(\bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{L}} \langle \mathfrak{b}\rangle\right) \mid (L, \mathfrak{L}) \in \mathbf{Y} \right\} / \sim_{\mathbf{Z}};$$

hier $\mathrm{End}_L\left(\bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{L}} \langle \mathfrak{b}\rangle\right) \sim_{\mathbf{Z}} \mathrm{End}_{L'}\left(\bigoplus_{\mathfrak{b}'\in\mathfrak{L}'} \langle \mathfrak{b}'\rangle\right)$ genau dann, wenn $\mathrm{End}_L\left(\bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{L}} \langle \mathfrak{b}\rangle\right) \cong \mathrm{End}_{L'}\left(\bigoplus_{\mathfrak{b}'\in\mathfrak{L}'} \langle \mathfrak{b}'\rangle\right)$.

Für eine 1-quasi-erbliche Algebra $(A = KQ/I, \leqslant)$ mit $\{n\} = \max\{(Q_0, \leqslant)\}$ bezeichnen wir weiterhin $L(A) := \mathrm{End}_A(P(n))$ und mit $\mathfrak{L}(A) := \{\mathfrak{f}_j \mid j \in Q_0\}$ (wobei $\mathfrak{f}_j : P(n) \to P(n)$ mit $\mathfrak{f}_j(e_n) = w_j^{(n)}$).

Wir definieren folgende Abbildungen $\Phi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ mit $\Phi([A, \leqslant]) = [L(A), \mathfrak{L}(A), \leqslant]$ und $\Psi : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Z}$ mit $\Psi([L, (\mathfrak{L}, \preccurlyeq)]) = \left[\mathrm{End}_L\left(\bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{L}} \langle \mathfrak{b}\rangle\right)\right]$. Nach dem Satz 4.1 erhalten wir folgende Beziehung:

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{X} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{Y} & \xrightarrow{\Psi} & \mathbf{Z} \\
 & & (L, (\mathfrak{L}, \prec)) & \longmapsto & \operatorname{End}_L\left(\bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{L}} \langle \mathfrak{b} \rangle\right) \\
(A, \leqslant) & \longmapsto & (L(A), (\mathfrak{L}(A), \leqslant)) & \longmapsto & (A, \leqslant)
\end{array}
$$

Die Abbildung Ψ ist offensichtlich bijektiv und aus $\Psi(\Phi([A])) = [A]$ erhalten wir, dass Φ injektiv ist, dennoch ist Φ nicht bijektiv, d.h. $\mathbf{X} \neq \mathbf{Z}$ wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel 4.3. Wir betrachten die K-Algebra $L = K\langle x, y\rangle / \langle x^2,\ y^2,\ xyx - yxy\rangle$ mit einer Basis $\mathfrak{L} = \{\underbrace{XYX}_{=:\mathfrak{b}_1}, \underbrace{XY}_{=:\mathfrak{b}_2}, \underbrace{YX}_{=:\mathfrak{b}_3}, \underbrace{X}_{=:\mathfrak{b}_4}, \underbrace{Y}_{=:\mathfrak{b}_5}, \underbrace{1}_{=:\mathfrak{b}_6}\}$ von L. Offensichtlich ist L eine lokale, selbstinjektive K-Algebra, denn $\operatorname{rad} L = \langle X_1\rangle + \langle X_2\rangle$ und für jedes von Null verschiedene Element von L, etwa $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \cdot \mathfrak{b}_i$ mit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_6) \neq (0, \ldots, 0)$ gilt

$$
a \cdot \left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \cdot \mathfrak{b}_i\right) = XYX, \text{ wobei } a = \begin{cases}
\frac{1}{\lambda_6} \cdot XYX, & \text{wenn } \lambda_6 \neq 0, \\
\frac{1}{\lambda_5} \cdot YX, & \text{wenn } \lambda_5 \neq 0 \text{ und } \lambda_6 = 0, \\
\frac{1}{\lambda_4} \cdot XY, & \text{wenn } \lambda_4 \neq 0 \text{ und } \lambda_i = 0 \text{ mit } i \in [5, 6], \\
\frac{1}{\lambda_3} \cdot X, & \text{wenn } \lambda_3 \neq 0 \text{ und } \lambda_i = 0 \text{ mit } i \in [4, 6], \\
\frac{1}{\lambda_2} \cdot Y, & \text{wenn } \lambda_2 \neq 0 \text{ und } \lambda_i = 0 \text{ mit } i \in [3, 6], \\
\frac{1}{\lambda_1} \cdot 1, & \text{wenn } \lambda_1 \neq 0 \text{ und } \lambda_i = 0 \text{ mit } i \in [2, 6],
\end{cases}
$$

d.h. $\operatorname{soc}_L L = \langle XYX\rangle$ ist der eindeutig bestimmte einfache Untermodul von ${}_L L$.

Mit der Halbordnungsrelation $\preccurlyeq$ auf $\mathfrak{L}$, die durch das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & \mathfrak{b}_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathfrak{b}_3 \arrow[d] & & \mathfrak{b}_2 \arrow[d] \\
\mathfrak{b}_4 \arrow[dr] & & \mathfrak{b}_5 \arrow[dl] \\
 & \mathfrak{b}_6 &
\end{tikzcd}
$$

von $(\mathfrak{L}, \preccurlyeq)$ veranschaulicht ist (hier $\mathfrak{b}_i \to \mathfrak{b}_j$ wenn $\mathfrak{b}_i \prec \mathfrak{b}_j$), erfüllt $\mathfrak{L}$ die Eigenschaft $\boxed{\preccurlyeq}$, denn $\operatorname{rad}\langle \mathfrak{b}_j\rangle = \langle X \cdot \mathfrak{b}_j\rangle + \langle Y \cdot \mathfrak{b}_j\rangle = \sum_{i \prec j} \langle \mathfrak{b}_i\rangle$, d.h. $[L, (\mathfrak{L}, \preccurlyeq)]$ ist ein Element von $\mathbf{Y}$.
Die Algebra $\operatorname{End}_L\left(\bigoplus_{j=1}^{6} \langle \mathfrak{b}_j\rangle\right)$ ist eine Basis-Algebra, weil $\langle \mathfrak{b}_i\rangle \ncong \langle \mathfrak{b}_j\rangle$ für $i \neq j$, d.h. $\operatorname{End}_L\left(\bigoplus_{j=1}^{6} \langle \mathfrak{b}_j\rangle\right) \cong KQ/\mathrm{I}$ und der Köcher Q besteht aus sechs Punkten, die mit den direkten Summanden von $\bigoplus_{j=1}^{6} \langle \mathfrak{b}_j\rangle$ korrespondieren. Für den L-Homomorphismus $f : \langle \mathfrak{b}_3\rangle \hookrightarrow \langle \mathfrak{b}_4\rangle$ gilt $f \neq f' \circ f''$ für alle $f' \in \operatorname{Hom}_L(\langle \mathfrak{b}_k\rangle, \langle \mathfrak{b}_4\rangle)$ und alle $f'' \in \operatorname{Hom}_L(\langle \mathfrak{b}_3\rangle, \langle \mathfrak{b}_k\rangle)$, wobei $k \in [1, 6] \setminus \{3, 4\}$. Daraus folgt also, dass ein Pfeil $(4 \to 3) \in Q_0$ existiert.
Sei nun $g : \langle \mathfrak{b}_4\rangle \longrightarrow \langle \mathfrak{b}_3\rangle$ mit $g \neq 0$, dann ist $g(X) = X \cdot a = a' \cdot YX$ für gewisse $a, a' \in L$. Für alle $b \in L$ gilt $X \cdot b \neq YX$. Es bleibt für a und a' nur die Möglichkeit $a = c \cdot YX$ und $a' = c \cdot X$ für ein $c \in K^*$. Für $g' : \langle \mathfrak{b}_1\rangle \xrightarrow{\cdot c \cdot 1} \langle \mathfrak{b}_3\rangle$ und $g'' : \langle \mathfrak{b}_4\rangle \xrightarrow{\cdot XY} \langle \mathfrak{b}_1\rangle$ gilt $g = g' \circ g''$, d.h. in dem Köcher Q finden wir $3 \rightleftarrows 4$ nicht vor. Die Algebra $\operatorname{End}_L\left(\bigoplus_{j=1}^{6} \langle \mathfrak{b}_j\rangle\right)$ ist damit keine 1-quasi-erbliche Algebra.

3.5 1-quasi-erbliche Algebren und kommutative, selbstinjektive Algebren

In diesem Abschnitt betrachten wir Isomorphieklassen aus $\mathbf{X}$, deren Repräsentanten BGG-Algebren mit einem Antiautomorphismus sind [X]. Außerdem betrachten wir die Menge der Paare $[L, (\mathfrak{L}, \preccurlyeq)]$ aus $\mathbf{Y}$, wobei L eine kommutative Algebra ist. Diese Teilmengen bezeichnen wir mit $\widetilde{\mathbf{X}}$ und $\widetilde{\mathbf{Y}}$. Wir zeigen, dass die Abbildungen $\Phi|_{\widetilde{\mathbf{X}}} : \widetilde{\mathbf{X}} \to \widetilde{\mathbf{Y}}$ und $\Psi|_{\widetilde{\mathbf{Y}}} : \widetilde{\mathbf{Y}} \to \Psi\left(\widetilde{\mathbf{Y}}\right)$ bijektiv sind. Daraus erhalten wir $\widetilde{\mathbf{X}} = \widetilde{\mathbf{Z}}$. Der Beweis für $\widetilde{Y} \overset{\Psi}{\subseteq} \widetilde{X}$ basiert auf dem Theorem von Dlab, Heath und Marko [DHM] und weiteren Eigenschaften von kommutativen Algebren.

Existiert auf einer K-Algebra $\mathcal{A}$ ein *Antiautomorphismus*, d.h. eine lineare Abbildung $\epsilon : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ mit den Eigenschaften

- $\epsilon(a \cdot a') = \epsilon(a') \cdot \epsilon(a)$,
- $\epsilon^2(a) = a$ für alle $a, a' \in \mathcal{A}$,

dann wird von ϵ eine Dualität auf $\mathcal{A}$ wie folgt induziert: Sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{A}$-Modul, dann bezeichnen wir mit $\mathcal{M}^*$ den K-Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{M}, K)$. Mit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{M}^* & \longrightarrow & \mathcal{M}^* \\ (a, f) & \mapsto & \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{a \cdot f} & K \\ u & \mapsto & f(\epsilon(a) \cdot u) \end{array} \end{array}$$

ist $\mathcal{M}^*$ ein $\mathcal{A}$-Modul. Sei $F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, dann $F^* := \mathrm{Hom}_K(F, K) : \mathcal{N}^* \to \mathcal{M}^*$ mit $F^*(g) = F \circ g$ ist ein $\mathcal{A}$-Homomorphismus. Mit $D_{(\epsilon)} = \mathrm{Hom}_K(-, K) : \text{mod-}\mathcal{A} \longrightarrow \text{mod-}\mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}$ eine BGG-Algebra.
Wir betrachten eine Klasse von 1-quasi-erblichen Algebren mit einem Antiautomorphismus. Dazu einige Bezeichnungen: Sei A eine 1-quasi-erbliche Algebra und (Q, I) das A beschreibende Paar. Für einen Weg $\mathrm{w} = (i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_m) \in KQ$ bezeichnen wir mit $\overline{\mathrm{w}}$ den (eindeutig bestimmten) entgegengesetzten Weg $(i_m \to \cdots \to i_2 \to i_1) \in KQ$. Für eine Relation $\rho = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \mathrm{w}_j \in \mathrm{I}$ sei $\overline{\rho} := \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \overline{\mathrm{w}}$ und $\overline{\mathrm{I}} := \{\overline{\rho} \mid \rho \in \mathrm{I}\}$ (es sei hier erinnert, dass wir mit w bzw. $\overline{w}$ die zu w bzw. $\overline{\mathrm{w}}$ gehörende Restklasse aus KQ/I bezeichnen). Offensichtlich gilt $\overline{\overline{\mathrm{w}}} = \mathrm{w}$ und damit $\overline{\overline{\rho}} = \rho$ sowie $\overline{\overline{\mathrm{I}}} = \mathrm{I}$. Außerdem gilt $\overline{\mathrm{w} \cdot \mathrm{w}'} = \overline{\mathrm{w}'} \cdot \overline{\mathrm{w}}$ für alle $\mathrm{w}, \mathrm{w}' \in KQ$.
Nachfolgend betrachten wir eine 1-quasi-erbliche Algebra $A = KQ/\mathrm{I}$, für die $\mathrm{I} = \overline{\mathrm{I}}$ gilt. Somit stimmen A und A^{op} in gewissem Sinne überein. Wir zeigen, dass in diesem Fall ein Antiautomorphismus auf A existiert, der die Pfeile in dem Köcher von A vertauscht. Solche Algebren sind BGG-Algebren.

Lemma 5.1. *Seien A eine 1-quasi-erbliche Algebra und (Q, I) der A beschreibende Köcher mit Relationen.*
Die lineare Abbildung $\epsilon : KQ \to KQ$ mit $\epsilon(w) = \overline{w}$ induziert genau dann einen Antiautomorphismus $\epsilon : A \longrightarrow A$, $\epsilon(w) = \overline{w}$ auf A, wenn $I = \overline{I}$.

Beweis. "$\Rightarrow$". Aus den Eigenschaften eines Antiautomorphismus erhalten wir, dass für jede lineare Kombination von gewissen Wegen $\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_r$ aus KQ Folgendes gilt (hier

$\mathrm{w}_t = \left(i \to k_1^{(t)} \to k_2^{(t)} \to \cdots \to k_{m_t}^{(t)} \to j\right)$ für alle $t \in [1, r]$):

$$\begin{aligned}
\epsilon\left(\sum_{t=1}^{r} \lambda_t \cdot \mathrm{w}_t\right) &= \sum_{t=1}^{r} \lambda_t \cdot \epsilon\left((k_{m_t}^{(t)} \to j) \cdot (k_{m_t-1}^{(t)} \to k_{m_t}^{(t)}) \cdot \cdots \cdot (i \to k_1^{(t)})\right) \\
&= \sum_{t=1}^{r} \lambda_t \cdot \epsilon\left(i \to k_1^{(t)}\right) \cdot \epsilon\left(k_1^{(t)} \to k_2^{(t)}\right) \cdot \cdots \cdot \epsilon\left(k_{m_t}^{(t)} \to j\right) \\
&= \sum_{t=1}^{r} \lambda_t \cdot \left(k_1^{(t)} \to i\right) \cdot \left(k_2^{(t)} \to k_1^{(t)}\right) \cdot \cdots \cdot \left(j \to k_{m_t}^{(t)}\right) \\
&= \sum_{t=1}^{r} \lambda_t \cdot \left(j \to k_{m_t}^{(t)} \to \cdots \to k_2^{(t)} \to k_1^{(t)} \to i\right) \\
&= \sum_{t=1}^{r} \lambda_t \cdot \overline{\mathrm{w}}_t.
\end{aligned}$$

Daraus folgt also, dass für jede Relation $\rho \in \mathrm{I}$ die Gleichung $\epsilon(\rho) = \overline{\rho}$ erfüllt ist. Ist also $\overline{\epsilon}$ ein Antiautomorphismus auf A, dann gilt für jede $\rho \in \mathrm{I}$ auch $\overline{\rho} \in \mathrm{I}$ und damit folgt $\mathrm{I} = \overline{\mathrm{I}}$ aus $\epsilon^2 = \mathrm{id}_{KQ}$.
"$\Leftarrow$" Wenn $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \mathrm{w} \in \mathrm{I}$, dann gilt auch $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \overline{\mathrm{w}} \in \mathrm{I}$, damit ist die lineare Abbildung $\epsilon : KQ/\mathrm{I} \to KQ/\mathrm{I}$ mit $\epsilon(w) = \overline{w}$ bijektiv. Insbesondere gilt $\epsilon(\epsilon(w)) = w$ und $\epsilon(w \cdot w') = \epsilon(w') \cdot \epsilon(w)$ für alle Wege $w, w' \in KQ/\mathrm{I}$ und damit gilt für alle $a, a' \in A$ demnach $\epsilon^2(a) = a$ und $\epsilon(a \cdot a') = \epsilon(a') \cdot \epsilon(a)$. ☐

Der nächste Satz zeigt, dass jede 1-quasi-erbliche K-Algebra $A = KQ/\mathrm{I}$ mit $\mathrm{I} = \overline{\mathrm{I}}$ eine Endomorphismen-Algebra von $\bigoplus_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{L}} \langle \mathfrak{b} \rangle$ ist, wobei L eine endlich dimensionale, kommutative, lokale, selbstinjektive K-Algebra ist und $\mathfrak{L}$ ist eine Basis von L mit der Eigenschaft $\boxed{\preccurlyeq}$.

Satz 5.2. *Seien $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ bzw. Φ, Ψ die im letzten Abschnitt definierten Klassen von Algebren bzw. Abbildungen. Seien*

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} := \left\{[A = KQ/I, \leqslant] \in \boldsymbol{X} \,\middle|\, I = \overline{I}\right\},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{Y}} := \{[L, (\mathfrak{L}, \preccurlyeq)] \in \boldsymbol{X} \mid L \text{ ist kommutativ } \},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{Z}} := \left\{\Psi\left([L, (\mathfrak{L}, \preccurlyeq)]\right) \,\middle|\, [L, (\mathfrak{L}, \leqslant)] \in \widetilde{\boldsymbol{Y}}\right\}.$$

Es gilt $\Phi\left([A = KQ/I, \leqslant]\right) \in \widetilde{\boldsymbol{Y}}$ für alle $[A = KQ/I, \leqslant] \in \widetilde{\boldsymbol{X}}$ und $\widetilde{\boldsymbol{Z}} = \widetilde{\boldsymbol{X}}$, d.h.

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} \underset{\Psi|_{\widetilde{\boldsymbol{Y}}}}{\overset{\Phi|_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}}{\rightleftarrows}} \widetilde{\boldsymbol{Y}}$$

$$\begin{array}{ccc}
[(A, \leqslant)] & \longmapsto & [(L(A), (\mathfrak{L}(A), \leqslant))] \\
\left[End_L\left(\bigoplus_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{L}} \langle \mathfrak{b} \rangle\right)\right] & \longleftarrow\!\shortmid & [(L, (\mathfrak{L}, \preccurlyeq))]
\end{array}$$

Aus den Eigenschaften von Φ und Ψ folgt $\Psi|_{\widetilde{\mathbf{Y}}} \circ \Phi|_{\widetilde{\mathbf{X}}} = \mathrm{Id}_{\widetilde{\mathbf{X}}}$ und damit gilt $\Phi|_{\widetilde{\mathbf{X}}} \circ \Psi|_{\widetilde{\mathbf{Y}}} = \mathrm{Id}_{\widetilde{\mathbf{Y}}}$.

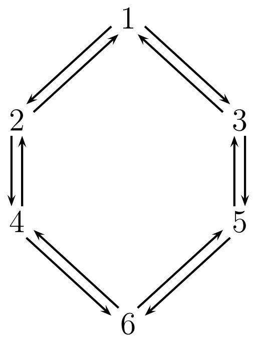
Die Klassifikation von 1-quasi-erblichen K-Algebren, die mit den zu ihnen gehörigen entgegengesetzten Algebren "übereinstimmen", bedingt auch die Klassifikation von endlich dimensionalen, kommutativen, lokalen, selbstinjektiven K-Algebren mit den Basen, die die Eigenschaft $\boxed{\preccurlyeq}$ haben. Da eine Basis von L mit der Eigenschaft $\boxed{\preccurlyeq}$ nicht eindeutig bestimmt ist, gibt es "mehr" Isomorphieklassen in $\widetilde{\mathbf{X}}$ als Isomorphieklassen von endlich dimensionalen, kommutativen, lokalen, selbstinjektiven K-Algebren. Anders gesagt sind $(\mathfrak{L}, \preccurlyeq)$ und $(\mathfrak{L}', \preccurlyeq')$ zwei Basen von L mit der Eigenschaft $\boxed{\preccurlyeq}$ bzw. $\boxed{\preccurlyeq'}$, dann sind $A := \mathrm{End}_L\left(\bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{L}} \langle \mathfrak{b} \rangle\right)$ und $A' := \mathrm{End}_L\left(\bigoplus_{\mathfrak{b}'\in\mathfrak{L}'} \langle \mathfrak{b}' \rangle\right)$ nicht notwendig isomorph, aber $\mathrm{End}_A(P_A(n)) \cong \mathrm{End}_{A'}(P_{A'}(n))$, hier ist n die Anzahl der Punkte im Köcher von A bzw. A'.

Beispiel 5.3. Seien $L = \mathbb{C}[x,y]/\left\langle x^4,\ y^4,\ xy,\ x^3 - y^3 \right\rangle$ und $(\mathfrak{L}_1, \preccurlyeq_1)$, $(\mathfrak{L}_2, \preccurlyeq_2)$, $(\mathfrak{L}_3, \preccurlyeq_3)$ Basen von L mit den Halbordnungen, die durch die folgenden Diagramme gegeben sind. In dem letzten Diagramm ist ω die 6-te Einheitswurzel$\omega = \frac{1}{2} + \mathtt{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ (hier $\mathtt{i}^2 = -1$).

$$\mathfrak{L}_1 = \begin{tikzcd} & X^3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X^2 \arrow[d] & & Y^2 \arrow[d] \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & 1 & \end{tikzcd} \qquad \mathfrak{L}_2 = \begin{tikzcd} & X^3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X^2 \arrow[d] \arrow[drr] & & Y^2 \arrow[d] \\ X \arrow[dr] & & X+Y \arrow[dl] \\ & 1 & \end{tikzcd} \qquad \mathfrak{L}_3 = \begin{tikzcd} & \mathtt{i} \cdot X^3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \omega^2 \cdot X^2 + Y^2 \arrow[d] \arrow[drr] & & X^2 + \omega^2 \cdot Y^2 \arrow[d] \arrow[dll] \\ X + \omega \cdot Y \arrow[dr] & & \omega \cdot X + Y \arrow[dl] \\ & 1 & \end{tikzcd}$$

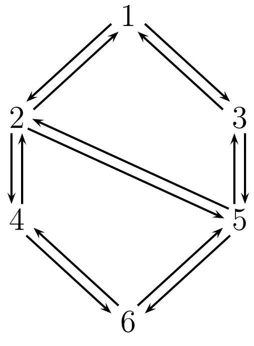
Die Paare $(L, ((\mathfrak{L}_1, \preccurlyeq_1)))$, $(L, ((\mathfrak{L}_2, \preccurlyeq_2)))$ und $(L, ((\mathfrak{L}_3, \preccurlyeq_3)))$ sind Elemente aus $\widetilde{\mathbf{Y}}$. Die dazu gehörigen 1-quasi-erblichen Algebren A_1, A_2 und A_3 sind durch die folgenden Köcher und Relationen dargestellt. Es gilt $L \cong \mathrm{End}_{A_1}(P_{A_1}(6)) \cong \mathrm{End}_{A_2}(P_{A_2}(6)) \cong \mathrm{End}_{A_3}(P_{A_3}(6))$ und $A_1 \ncong A_2$, $A_1 \ncong A_3$ und $A_2 \ncong A_3$.

$$A_1 = \mathrm{End}_L\left(\bigoplus_{b\in\mathfrak{L}_1} \langle b \rangle\right) \quad \leftrightsquigarrow$$



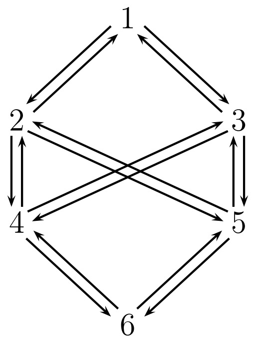
$$\begin{array}{rcl} 121 & = & 0 \\ 1246 & = & 1356 \\ \\ 212 & = & 242 \\ \\ 424 & = & 464 \\ 465 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 131 & = & 0 \\ 6421 & = & 6531 \\ \\ 313 & = & 353 \\ \\ 535 & = & 565 \\ 564 & = & 0 \end{array}$$

$$A_2 = \mathrm{End}_L\left(\bigoplus_{b\in\mathfrak{L}_2} \langle b \rangle\right) \quad \leftrightsquigarrow$$



$$\begin{array}{rcl} 121 & = & 0 \\ 246 & = & 256 \\ 642 & = & 652 \\ \\ 212 & = & 242 \\ 212 & = & 252 \\ 253 & = & 0 \\ 465 & = & 425 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 131 & = & 0 \\ 125 & = & 135 \\ 521 & = & 531 \\ 464 & = & 424 \\ \\ 313 & = & 353 \\ 352 & = & 0 \\ \\ 565 & = & 525 + 535 \\ 564 & = & 5214 \end{array}$$

$$A_3 = \operatorname{End}_L \left(\bigoplus_{b \in \mathfrak{L}_3} \langle b \rangle \right) \quad \rightsquigarrow$$



121	=	0	131	=	0
124	=	134	135	=	125
246	=	256	356	=	346
642	=	652	643	=	643
212	=	−242	313	=	−353
252	=	0	343	=	0
213	=	253	312	=	342
213	=	243	312	=	352
434	=	464	525	=	565
465	=	435 + 425	562	=	524 + 534

(Die Kategorie mod $-$ A_3 beschreibt einen regulären Block von $\mathcal{O}(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}))$.)

Wir betrachten nun die Algebra $\operatorname{End}_L \left(\bigoplus_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{L}} \langle \mathfrak{b} \rangle\right)$ für ein Paar $(L, (\mathfrak{L}, \preccurlyeq))$ aus $\widetilde{\mathbf{Y}}$. Die von den Elementen aus $\mathfrak{L}$ erzeugten Ideale sind wegen der Kommutativität von L paarweise nicht isomorph. Damit ist die K-Algebra $\operatorname{End}_L \left(\bigoplus_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{L}} \langle \mathfrak{b} \rangle\right)$ basisch, d.h. $\operatorname{End}_L \left(\bigoplus_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{L}} \langle \mathfrak{b} \rangle\right) = KQ/\mathrm{I}$ und $|Q_0| = |\mathfrak{L}|$ (jedes Element $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{L}$ korrespondiert also mit einem Punkt $i_\mathfrak{b}$ aus Q_0). Außerdem gilt $i_\mathfrak{b} < i_{\mathfrak{b}'}$ genau dann, wenn $\mathfrak{b} \prec \mathfrak{b}'$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $\langle \mathfrak{b} \rangle \subset \langle \mathfrak{b}' \rangle$ für alle $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in \mathfrak{L}$. Die Voraussetzungen des Theorems in [DHM] sind damit erfüllt, d.h. $\operatorname{End}_L \left(\bigoplus_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{L}} \langle \mathfrak{b} \rangle\right)$ ist eine 1-quasi-erbliche K-Algebra. Zu zeigen ist also $\mathrm{I} = \overline{\mathrm{I}}$.
Wie bereits in 3.1 erwähnt, korrespondiert für $i_\mathfrak{b} \lhd i_{\mathfrak{b}'}$ der Pfeil $(i_\mathfrak{b} \to i_{\mathfrak{b}'}) \in Q_1$ mit einem surjektiven L-Homomorphismus $\langle \mathfrak{b}' \rangle \xrightarrow{\cdot y} \langle \mathfrak{b} \rangle$ und der Pfeil $(i_{\mathfrak{b}'} \to i_\mathfrak{b}) \in Q_1$ mit einem injektiven L-Homomorphismus $\langle \mathfrak{b} \rangle \xrightarrow{\cdot x} \langle \mathfrak{b}' \rangle$, o.B.d.A. $x = 1$ und $\mathfrak{b}' \cdot y = \mathfrak{b}$. Somit erhalten wir für zwei benachbarte Elemente $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ aus $\mathfrak{L}$ folgende Situation: In dem Köcher Q gilt $i_\mathfrak{b} \rightleftarrows i_{\mathfrak{b}'}$ und für die mit diesen Pfeilen korrespondierenden L-Homomorphismen $\langle \mathfrak{b} \rangle \underset{\cdot y}{\overset{\cdot x}{\rightleftarrows}} \langle \mathfrak{b}' \rangle$ ist einer der beiden Fälle erfüllt: Entweder $x = 1$ und $\mathfrak{b}' \cdot y = \mathfrak{b}$ oder $y = 1$ und $\mathfrak{b} \cdot x = \mathfrak{b}'$.

Lemma 5.4. *Sei $(L, (\mathfrak{L}, \preccurlyeq)) \in \boldsymbol{Y}$, wobei L kommutativ ist. Seien $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_{i+1}, \dots, \mathfrak{b}_r$ Elemente aus $\mathfrak{L}$, so dass $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{b}_{i+1}$ Nachbarn bezüglich $\preccurlyeq$ sind für alle $i \in [0, r-1]$ und $\langle \mathfrak{b}_0 \rangle \underset{\cdot y_1}{\overset{\cdot x_1}{\rightleftarrows}} \langle \mathfrak{b}_1 \rangle \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows \langle \mathfrak{b}_{i-1} \rangle \underset{\cdot y_i}{\overset{\cdot x_i}{\rightleftarrows}} \langle \mathfrak{b}_i \rangle \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows \langle \mathfrak{b}_{r-1} \rangle \underset{\cdot y_r}{\overset{\cdot x_r}{\rightleftarrows}} \langle \mathfrak{b}_r \rangle$ die zu den Wegen $(j_{\mathfrak{b}_0} \to j_{\mathfrak{b}_1} \to \cdots \to j_{\mathfrak{b}_{i-1}} \to j_{\mathfrak{b}_i} \to \dots \to j_{\mathfrak{b}_r})$ und $(j_{\mathfrak{b}_r} \to \cdots \to j_{\mathfrak{b}_i} \to j_{\mathfrak{b}_{i-1}} \to \dots \to j_{\mathfrak{b}_1} \to j_{\mathfrak{b}_0})$ korrespondierenden L-Homomorphismen, wobei entweder $x_i = 1$ und $\mathfrak{b}_i \cdot y_i = \mathfrak{b}_{i-1}$ oder $\mathfrak{b}_{i-1} \cdot x_i = \mathfrak{b}_i$ und $y_i = 1$ für jedes $i \in [1, r]$ gilt. Dann gilt $\mathfrak{b}_1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_r = y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_r \cdot \mathfrak{b}_r$.*

Beweis durch Induktion nach r. Wenn $r = 1$, dann gilt im Fall $x_1 = 1$ und $\mathfrak{b}_1 \cdot y_1 = \mathfrak{b}_0$ also $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}_0 \cdot x_1 = \mathfrak{b}_1 \cdot y_1 = \mathfrak{b}_0$ und im Fall $\mathfrak{b}_0 \cdot x_1 = \mathfrak{b}_1$ und $y_1 = 1$ gilt $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_0 \cdot x_1 = \mathfrak{b}_1 \cdot y_1 = \mathfrak{b}_1$. Angenommen $\mathfrak{b}_1 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_m = y_1 \cdot \dots \cdot y_m \cdot \mathfrak{b}_m$ für $m > 1$. Für x_{m+1} und y_{m+1} gilt wiederum eine der beiden Möglichkeiten: (1) Wenn $x_{m+1} = 1$ und $\mathfrak{b}_{m+1} \cdot y_{m+1} = \mathfrak{b}_m$, dann gilt $\mathfrak{b}_1 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_m \cdot x_{m+1} = \mathfrak{b}_1 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_m \overset{I.V.}{=} y_1 \cdot \dots \cdot y_m \cdot \mathfrak{b}_m = y_1 \cdot \dots \cdot y_m \cdot y_{m+1} \cdot \mathfrak{b}_m$. (2) Wenn $\mathfrak{b}_m \cdot x_{m+1} = \mathfrak{b}_{m+1}$ und $y_{m+1} = 1$, dann gilt $\mathfrak{b}_1 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_m \cdot x_{m+1} \overset{I.V.}{=} y_1 \cdot \dots \cdot y_m \cdot \underbrace{\mathfrak{b}_m \cdot x_{m+1}}_{=\mathfrak{b}_{m+1}} =$ $y_1 \cdot \dots \cdot y_m \cdot \mathfrak{b}_{m+1} = y_1 \cdot \dots \cdot y_m \cdot y_{m+1} \cdot \mathfrak{b}_{m+1}$. □

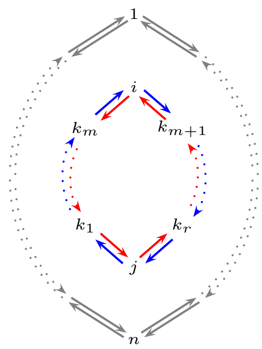
Lemma 5.5. *Sei L eine endlich dimensionale, kommutative, lokale, selbstinjektive Algebra und $(\mathfrak{L}, \preccurlyeq)$ eine Basis von L mit der Eigenschaft $\boxed{\preccurlyeq}$. Sei (Q, I) das die Algebra $\operatorname{End}_L \left(\bigoplus_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{L}} \langle \mathfrak{b} \rangle\right)$ darstellende Paar, dann gilt $I = \overline{I}$.*

Beweis. Seien $i, j \in Q_0$ und $\sum_{t=1}^{r} \lambda_t \cdot \left(i \to k_1^{(t)} \to k_2^{(t)} \to \cdots \to k_{m_t}^{(t)} \to j\right)$ eine Relation aus I. Zu zeigen ist $\sum_{t=1}^{r} \lambda_t \cdot \left(j \to k_{m_t}^{(t)} \to \cdots \to k_2^{(t)} \to k_1^{(1)} \to i\right) \in \mathrm{I}$.
Die Summe $\sum_{t=1}^{r} \lambda_t \cdot \left(i \to k_1^{(t)} \to k_2^{(t)} \to \cdots \to k_{m_t}^{(t)} \to j\right)$ ist genau dann eine Relation, wenn $\sum_{t=1}^{r} \lambda_t \cdot \left(\langle \mathfrak{b}_i \rangle \xrightarrow{\cdot x_1^{(t)}} \left\langle \mathfrak{b}_{k_1^{(t)}} \right\rangle \xrightarrow{\cdot x_2^{(t)}} \left\langle \mathfrak{b}_{k_2^{(t)}} \right\rangle \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left\langle \mathfrak{b}_{k_{m_t}^{(t)}} \right\rangle \xrightarrow{\cdot x_{m_t+1}^{(t)}} \langle \mathfrak{b}_j \rangle \right)$, also der zu dieser Relation korrespondierende L-Homomorphismus, ein Null-Homomorphismus ist; hier gilt für jedes $l \in [1, m_t+1]$ entweder $x_l^{(t)} = 1$ oder $\mathfrak{b}_{k_{l-1}^{(t)}} \cdot x_l^{(t)} = \mathfrak{b}_{k_l^{(t)}}$ $\left(k_0^{(t)} = i \text{ und } \mathfrak{b}_{k_{m_t+1}^{(t)}} = \mathfrak{b}_j\right)$.
Dies ist wiederum genau dann erfüllt, wenn $\sum_{t=1}^{r} \lambda_t \cdot \left(\mathfrak{b}_i \cdot x_1^{(t)} \cdot x_2^{(t)} \cdot \cdots \cdot x_{m_t+1}^{(t)}\right) = 0$. Nach dem Lemma 5.4 gilt $\sum_{t=1}^{r} \lambda_t \cdot \left(\mathfrak{b}_j \cdot y_1^{(t)} \cdot y_2^{(t)} \cdot \cdots \cdot y_{m_t+1}^{(t)}\right) = 0$, wobei für jedes $l \in [1, m_t+1]$ entweder $y_l^{(t)} = 1$ gilt oder $\mathfrak{b}_l \cdot y_l^{(t)} = \mathfrak{b}_{l-1}$. Für den L-Homomorphismus, der dieser Summe entspricht, gilt $\sum_{t=1}^{r} \lambda_t \cdot \left(\langle \mathfrak{b}_j \rangle \xrightarrow{\cdot y_{m_t+1}^{(t)}} \left\langle \mathfrak{b}_{k_{m_t}^{(t)}} \right\rangle \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left\langle \mathfrak{b}_{k_2^{(t)}} \right\rangle \xrightarrow{\cdot y_2^{(t)}} \left\langle \mathfrak{b}_{k_1^{(t)}} \right\rangle \xrightarrow{\cdot y_1^{(t)}} \langle \mathfrak{b}_i \rangle \right) = 0$ und damit ist die dazu korrespondierende lineare Kombination aus Wegen eine Relation, d.h. $\sum_{t=1}^{r} \lambda_t \cdot \left(j \to k_{m_t}^{(t)} \to \cdots \to k_2^{(t)} \to k_1^{(t)} \to i\right) \in \mathrm{I}$. □

Nun zeigen wir, dass für eine 1-quasi-erbliche Algebra $A = KQ/\mathrm{I}$ mit $\{n\} = \max\{(Q_0, \leqslant)\}$ die Algebra $\mathrm{End}_A(P(n))$ kommutativ ist, wenn $\mathrm{I} = \overline{\mathrm{I}}$.

Lemma 5.6. *Sei $(A = KQ/I, \leqslant)$ eine 1-quasi-erbliche Algebra mit $I = \overline{I}$. Sei $j \in Q_0$, für jedes $i \in \Lambda^{(j)}$ und jeden Weg $w(i) = (j \to k_1 \to k_2 \to \cdots \to k_m \to i \to k_{m+1} \to \cdots \to k_r \to j)$ mit $j \rhd k_1 \rhd k_2 \rhd \cdots \rhd k_m \rhd i \lhd k_{m+1} \lhd \cdots \lhd k_r \lhd j$ gilt $w(i) = \overline{w(i)}$.*

Im Bild rechts sehen wir die visuelle Entsprechung dieses Lemmas:
Das ganze Bild zeigt ebenfalls den Köcher von A.
Der Weg $w(i)$ beginnt in j, steigt bis i und verläuft dann fallend bis j. Dieser Weg ist im Bild mit blauen Pfeilen markiert.
Der Weg $\overline{w(i)}$ (rote Pfeile) verläuft entgegengesetzt auch steigend von j nach i und fallend von i nach j.
Das Lemma sagt, dass die beiden Wege $w(i)$ und $\overline{w(i)}$ im Fall $I = \overline{I}$ gleich sind.



Beweis Für den Weg $w(i) = (j \to k_1 \to k_2 \to \cdots \to k_m \to i \to k_{m+1} \to \cdots \to k_m \to j)$ bezeichnen wir mit $v(i)$ und mit $u(i)$ die Wege

$$v(i) := (j \to k_1 \to k_2 \to \cdots \to k_m \to i) \text{ und } u(i) := (j \to k_r \to k_{r-1} \to \cdots \to k_{m+1} \to i),$$

es gilt also $w(i) = \overline{u(i)} \cdot v(i)$. Zu zeigen ist $\overline{u(i)} \cdot v(i) = \overline{v(i)} \cdot u(i)$.
Die Wege $v(i)$ und $u(i)$ sind steigende Wege von j nach i in A, d.h. von der Form $w \uparrow (j \to i)$ und damit nach Lemma 2.4 (Kap. 2) gilt $\langle v(i) \rangle = \langle u(i) \rangle = P(i)$, mit anderen Worten es existieren ein $c_i \in K^*$, $\lambda_t \in K$ für jedes $t \in \Lambda^{(i)} \setminus \{i\}$ und ein fallender Weg $w \downarrow (t \to i)$ von t nach i mit

$$v(i) = c_i \cdot u(i) + \sum_{t\in\Lambda^{(i)}\backslash\{i\}} \lambda_t \cdot (w \downarrow (t \to i) \cdot v(t)).$$

Der Beweis verläuft durch Induktion nach $\left|\Lambda^{(i)}\right|$. Für $\left|\Lambda^{(i)}\right| = 1$ gilt $i = 1$, d.h. das minimale Element in Q_0 bezüglich $\leqslant$. Es gilt also $\underline{\Lambda^{(1)}\backslash\{1\} = \emptyset}$ und damit erhalten wir $v(1) = c_1 \cdot u(1)$. Nach der Voraussetzung $\mathrm{I} = \overline{\mathrm{I}}$ gilt $\overline{v(1)} = c_1 \cdot \overline{u(1)}$ und damit erhalten wir $\overline{u(1)} \cdot v(1) = c_1 \cdot \left(\overline{u(1)} \cdot u(1)\right) = \overline{v(1)} \cdot u(1)$.
Angenommen $\overline{u(t)} \cdot v(t) = \overline{v(t)} \cdot u(t)$ für alle $t \in \Lambda^{(j)}$ mit $\left|\Lambda^{(t)}\right| \leq m$.
Sei $i \in Q_0$ mit $\left|\Lambda^{(i)}\right| = m+1$, dann gilt für $v(i) = c_i \cdot u(i) + \sum_{t\in\Lambda^{(i)}\backslash\{i\}} \lambda_t \cdot (w \downarrow (t \to i) \cdot v(t))$ auch $\overline{v(i)} = c_i \cdot \overline{u(i)} + \sum_{t\in\Lambda^{(i)}\backslash\{i\}} \lambda_t \cdot \left(\overline{w \downarrow (t \to i) \cdot v(t)}\right)$ nach der Voraussetzung $\mathrm{I} = \overline{\mathrm{I}}$. Die Gleichung $\overline{u(i)} \cdot v(i) = \overline{v(i)} \cdot u(i)$, d.h.

$$c_i \cdot \left(\overline{u(i)} \cdot u(i)\right) + \sum_{t\in\Lambda^{(i)}\backslash\{i\}} \lambda_t \cdot \left(\overline{u(i)} \cdot w \downarrow (t \to i) \cdot v(t)\right) = c_i \cdot \left(\overline{u(i)} \cdot u(i)\right) + \sum_{t\in\Lambda^{(i)}\backslash\{i\}} \lambda_t \cdot \left(\overline{w \downarrow (t \to i) \cdot v(t)} \cdot u(i)\right)$$

gilt genau dann, wenn $\overline{u(i)} \cdot w \downarrow (t \to i) \cdot v(t) = \overline{w \downarrow (t \to i) \cdot v(t)} \cdot u(i)$ für jedes $t \in \Lambda^{(i)}\backslash\{i\}$. Der Weg $\overline{u(i)} \cdot w \downarrow (t \to i)$ ist ein fallender Weg von t (durch i) nach j und hat damit die Form $\overline{u(t)}$. Aus $\Lambda^{(t)} \subset \Lambda^{(i)}$ folgt $\left|\Lambda^{(t)}\right| \leq m$, somit erhalten wir nach der Induktionsvoraussetzung $\left(\overline{u(i)} \cdot w \downarrow (t \to i)\right) \cdot v(t) = \overline{v(t)} \cdot \overline{w \downarrow (t \to i)} \cdot u(i) = \overline{w \downarrow (t \to i) \cdot v(t)} \cdot u(i)$. □

Aus dem Lemma 3.5 erhalten wir, dass die Algebra $\mathrm{End}_A(P(n))$ von $\{\mathfrak{f}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{f}_{i_k}\}$ erzeugt ist, wobei $i_1, \ldots, i_k$ die Nachbarn von n sind. Somit ist $\mathrm{End}_A(P(n))$ genau dann kommutativ, wenn $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{f}' = \mathfrak{f}' \circ \mathfrak{f}$ für alle $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}' \in \{\mathfrak{f}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{f}_{i_k}\}$.

Lemma 5.7. *Sei $(A = KQ/I, \leqslant)$ eine 1-quasi-erbliche Algebra mit $I = \overline{I}$, dann ist die Algebra $\mathrm{End}_A(P(n))$ kommutativ, wobei $\{n\} = \max\{(Q_0 \leqslant)\}$.*

Beweis. Seien $\{i_1, \ldots, i_k\} = \{i \in Q_0 \mid i \lhd n\}$ und $\mathfrak{f}_i$ der im Abschnitt 2 definierte Endomorphismus von $P(n)$: Es gilt also $\mathfrak{f}_i(e_n) = (n \to i \to n)$. Wie bereits erwähnt, ist $\{\mathfrak{f}_i \mid i \in \{i_1, \ldots, i_k\}\}$ ein erzeugendes System von $\mathrm{End}_A(P(n))$. Zu zeigen ist $\mathfrak{f}_i \circ \mathfrak{f}_j = \mathfrak{f}_j \circ \mathfrak{f}_i$, genauer $(\mathfrak{f}_i \circ \mathfrak{f}_j)(e_n) = (\mathfrak{f}_j \circ \mathfrak{f}_i)(e_n)$ für alle $i, j \in \{i_1, \ldots, i_k\}$.
Seien $i, j \in \{i_1, \ldots, i_k\}$, dann $(\mathfrak{f}_i \circ \mathfrak{f}_j)(e_n) = (n \to i \to n \to j \to n)$. Zu zeigen ist also $(n \to i \to n \to j \to n) = (n \to j \to n \to i \to n)$ für alle $i, j \in \{i_1, \ldots, i_k\}$. Sei $k \in \Lambda^{(i)} \cap \Lambda^{(j)}$, dann gibt es einen Weg $\left(i \to l_1^{(k)} \to l_2^{(k)} \to \cdots \to l_{m_k}^{(k)} \to k \to l_{m_k+1}^{(k)} \to \cdots \to l_{r_k}^{(k)} \to j\right)$ in A mit $i \rhd l_1^{(k)} \rhd l_2^{(k)} \rhd \cdots \rhd l_{m_k}^{(k)} \rhd k \lhd l_{m_k+1}^{(k)} \lhd \cdots \lhd l_{r_k}^{(k)} \lhd j$. Nach der Bemerkung 2.7 (Kap 2) existieren $\lambda_k \in K$ mit

$$(i \to n \to j) = \sum_{k\in\Lambda^{(i)}\cap\Lambda^{(j)}} \lambda_k \cdot \left(i \to l_1^{(k)} \to l_2^{(k)} \to \cdots \to l_{m_k}^{(k)} \to k \to l_{m_k+1}^{(k)} \to \cdots \to l_{r_k}^{(k)} \to j\right)$$

Nach der Voraussetzung $\mathrm{I} = \overline{\mathrm{I}}$, erhalten wir

$$(j \to n \to i) = \sum_{k\in\Lambda^{(i)}\cap\Lambda^{(j)}} \lambda_k \cdot \left(j \to l_{r_k}^{(k)} \to l_{r_k-1}^{(k)} \to \cdots \to l_{m_k+1}^{(k)} \to k \to l_{m_k}^{(k)} \to \cdots \to l_1^{(k)} \to i\right)$$

Die Wege $(n \to i \to n \to j \to n)$ und $(n \to j \to n \to i \to n)$ sind also genau dann gleich, wenn

$$\begin{aligned} w(k) := \Big(n \to i \to l_1^{(k)} \to l_2^{(k)} \to \cdots \to l_{m_k}^{(k)} \to k \to l_{m_k+1}^{(k)} \to \cdots \to l_{r_k}^{(k)} \to j \to n\Big) \\ \| \\ \Big(n \to j \to l_{r_k}^{(k)} \to l_{r_k-1}^{(k)} \to \cdots \to l_{m_k+1}^{(k)} \to k \to l_{m_k}^{(k)} \to \cdots \to l_1^{(k)} \to i \to n\Big), \end{aligned}$$

d.h. wenn $w(k) = \overline{w(k)}$ für alle $k \in \Lambda^{(i)} \cap \Lambda^{(j)}$. Der Weg erfüllt die Voraussetzungen des Lemma 5.6 (für $j = n$ und $i = k$) und damit ist die obere Gleichung erfüllt. $\square$

Aus den Lemmas 5.5 und 5.7 folgt der Beweis für den Satz 5.2.

Abschließende Bemerkung

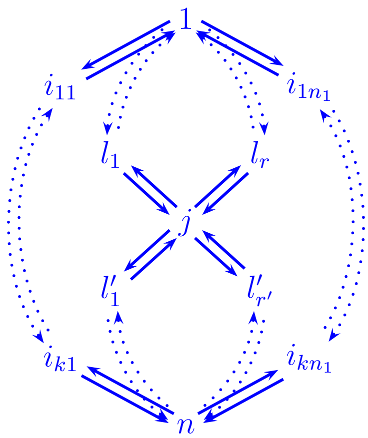
Ein Aspekt bei der Betrachtung einer Klasse von Algebren ist auch die Bestimmung von paarweise nicht isomorphen Algebren.
Eine Möglichkeit zur Klassifikation ist die Festlegung der Anzahl von Isomorphieklassen einfacher Moduln, d.h. die Anzahl der Punkte im Köcher. Danach versucht man alle Algebren dieser Klasse zu bestimmen, deren Köcher genau diese Anzahl der Punkte im Köcher haben.
Weitere Fragestellungen wären auch die nach der möglichen Existenz von gewissen *Grund-Algebren* und gewissen *Verknüpfungs-Verfahren*, mit denen sich aus diesen Grund-Algebren alle Algebren dieser Klasse konstruieren lassen.

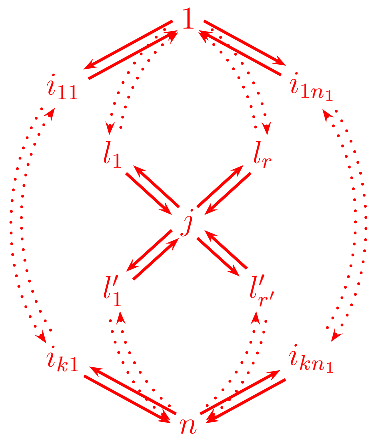
Abschließend werden an dieser Stelle drei mögliche Verknüpfungs-Verfahren (von mehreren) zur Konstruktion von 1-quasi-erblichen Algebren vorgestellt.
Im letzten Kapitel haben wir gezeigt, dass die Klassifikation nach 1-quasi-erblichen K-Algebren mit der Klassifikation von lokalen, selbstinjektiven K-Algebren in einer Beziehung steht. Deshalb gibt es eine Entsprechung zu den drei Verfahren für die Konstruktion von lokalen, selbstinjektiven Algebren.
Wir werden sehen , dass die Palette der Konstruktions-Möglichkeiten noch nicht vollständig ist, denn das Ausmaß der Komplexität dieser Klassen von Algebren wird hier erst ahnbar. Auf ausführliche Beweise wird in diesen Beschreibungen verzichtet.

Die Algebra $A \odot A'$

Hier beschreiben wir eine Verknüpfung auf der Menge der 1-quasi-erblichen K-Algebren, die wir mit $\odot$ bezeichnen. Zur Reduktion der Komplexität verwenden wir zur Unterscheidung von Algebren und deren "Zubehör" nicht die jeweiligen Indizies, sondern wir benutzen Farben mit Bedeutungen für jede Notation der jeweiligen Algebra.

Seien $(\mathrm{A}= K\mathrm{Q}/\mathrm{I}, \leqslant)$ und $(\mathrm{A}= K\mathrm{Q}/\mathrm{I}, \leqslant)$ zwei 1-quasi-erbliche Algebren mit $|\mathrm{Q}_0|\,, |\mathrm{Q}_0| \geq 3$ und die Köcher sind entsprechend

$Q_{\mathbf{A}} \rightsquigarrow$ 

$Q_{\mathbf{A}} \rightsquigarrow$ 

Die Relationen die I und I erzeugen, bezeichnen wir entsprechend mit ρ bzw. ρ.

Die Algebra $\mathrm{A}\odot\mathrm{A}$ ist durch den Köcher $Q = (Q_0, Q_1)$ und Relationen I dargestellt, die wie folgt definiert sind:

- Zu $(Q_0, \leqslant)$: Die Menge der Punkte im Köcher von $\textcolor{blue}{\mathsf{A}}\odot\textcolor{red}{\mathsf{A}}$ besteht aus den Punkten der Menge $\textcolor{blue}{\mathsf{Q}_0}\setminus\{\textcolor{blue}{1,n}\}$ und $\textcolor{red}{\mathsf{Q}_0}\setminus\{\textcolor{red}{1,n}\}$ (hier behalten die Farben der Punkte ihre Bedeutung, d.h. $\textcolor{blue}{i}\neq\textcolor{red}{i}$), sowie aus zwei zusätzlichen Punkten 1 und n.
  Wir definieren die Abbildung ξ wie folgt:

$$\xi : \textcolor{blue}{\mathsf{Q}_0}\cup\textcolor{red}{\mathsf{Q}_0} \longrightarrow Q_0 \text{ mit } \xi(\mathbf{i}) = \begin{cases} \mathbf{i} & \text{wenn} \quad \mathbf{i}\in(\textcolor{blue}{\mathsf{Q}_0}\cup\textcolor{red}{\mathsf{Q}_0})\setminus\{\textcolor{blue}{1,n},\textcolor{red}{1,n}\}, \\ 1 & \text{wenn} \quad \mathbf{i}=\textcolor{blue}{1},\textcolor{red}{1}, \\ n & \text{wenn} \quad \mathbf{i}=\textcolor{blue}{n},\textcolor{red}{n}. \end{cases}$$

  ξ ist eingeschränkt auf $(\textcolor{blue}{\mathsf{Q}_0}\cup\textcolor{red}{\mathsf{Q}_0})\setminus\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ mit $(\mathbf{i},\mathbf{j}) = (\textcolor{blue}{1},\textcolor{blue}{n}),(\textcolor{blue}{1},\textcolor{red}{n}),(\textcolor{red}{1},\textcolor{blue}{n}),(\textcolor{red}{1},\textcolor{red}{n})$ offensichtlich bijektiv. Anders gesagt, Q_0 besteht aus der Punkten der Mengen $\textcolor{blue}{\mathsf{Q}_0}$ und $\textcolor{red}{\mathsf{Q}_0}$, wobei das minimale bzw. maximale Element von $(\textcolor{blue}{\mathsf{Q}_0},\textcolor{blue}{\leqslant})$ mit dem minimalen bzw. maximalen Element von $(\textcolor{red}{\mathsf{Q}_0},\textcolor{red}{\leqslant})$ identifiziert wird.

  Die Halbordnung $\leqslant$ auf der Menge Q_0 sei wie folgt definiert: Seien $\mathbf{i},\mathbf{j}\in\textcolor{blue}{\mathsf{Q}_0}\cup\textcolor{red}{\mathsf{Q}_0}$, dann

$$\xi(\mathbf{i})\leqslant\xi(\mathbf{j}) \quad \text{genau dann wenn} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{i},\mathbf{j}\in\textcolor{blue}{\mathsf{Q}_0}\setminus\{\textcolor{blue}{1,n}\} & \text{mit } \mathbf{i}\textcolor{blue}{\leqslant}\mathbf{j}, \\ \mathbf{i},\mathbf{j}\in\textcolor{red}{\mathsf{Q}_0}\setminus\{\textcolor{red}{1,n}\} & \text{mit } \mathbf{i}\textcolor{red}{\leqslant}\mathbf{j}, \\ \mathbf{i}=\textcolor{blue}{1} \text{ oder } \mathbf{i}=\textcolor{red}{1} & \\ \mathbf{j}=\textcolor{blue}{n} \text{ oder } \mathbf{j}=\textcolor{red}{n}. & \end{array}$$

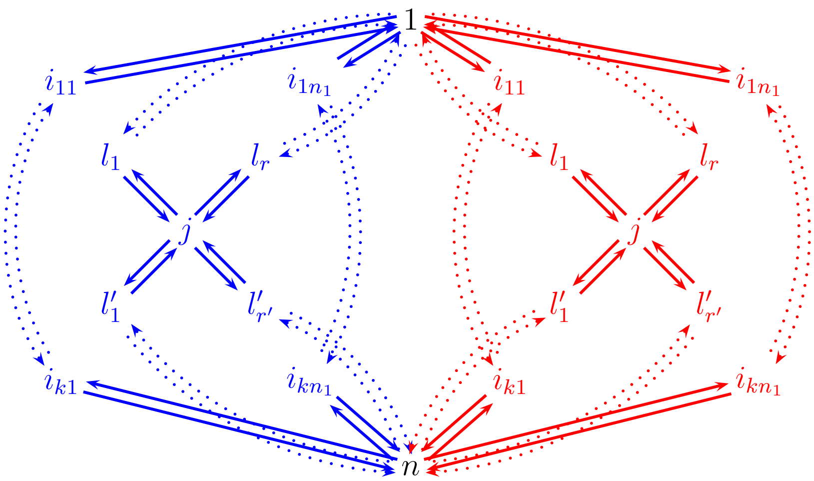
  Offensichtlich ist 1 ein eindeutig bestimmtes minimales und n ein eindeutig bestimmtes maximales Element in Q_0 bezüglich $\leqslant$ und je zwei Elemente aus $Q_0\setminus\{1,n\}$, die verschiedene Farben haben, sind nicht vergleichbar. Das maximale Element n sei die Anzahl der Elemente in Q_0, d.h. es gilt $n=\textcolor{blue}{n}+\textcolor{red}{n}-2$.

- Zu Q_1: Zwei Punkte in Q_0 seien genau dann mit zwei Pfeilen in entgegengesetzten Richtungen verbunden, wenn sie bezüglich der Halbordnung $\leqslant$ benachbart sind. Es ist leicht zu sehen, dass die von ξ induzierte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \textcolor{blue}{\mathsf{Q}_1}\cup\textcolor{red}{\mathsf{Q}_1} & \longrightarrow & Q_1 \\ (\mathbf{i}\to\mathbf{j}) & \longmapsto & (\xi(\mathbf{i})\to\xi(\mathbf{j})) \end{array}$$

  bijektiv ist. Der Köcher der Algebra $\textcolor{blue}{\mathsf{A}}\odot\textcolor{red}{\mathsf{A}}$ hat somit folgende Gestalt:

$Q_{\textcolor{blue}{\mathbf{A}}\odot\textcolor{red}{\mathbf{A}}} \quad \rightsquigarrow$



- Zu I: Für einen Weg $\mathbf{w} = (\mathbf{i}_1 \to \cdots \to \mathbf{i}_m) \in KQ \cup KQ$ sei $\xi(\mathbf{w}) = (\xi(\mathbf{i}_1) \to \cdots \to \xi(\mathbf{i}_m))$ der entsprechende Weg in KQ und für eine Relation $\rho = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \mathbf{w}_i \in \mathrm{I} \cup \mathrm{I}$ sei $\xi(\rho) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \xi(\mathbf{w}_i)$. Das Ideal I sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} I := \langle\ \{\xi(\rho) \mid \rho \in \mathrm{I} \cup \mathrm{I}\} \ &\cup\ \{\xi(i) \to n \to \xi(j) \mid i \lhd n,\ j \lhd n\} \\ &\cup\ \{\xi(i) \to n \to \xi(j) \mid i \lhd n,\ j \lhd n\} \\ &\cup\ \{\xi(w \uparrow (n \to 1)) - \xi(w \uparrow (n \to 1))\} \\ &\cup\ \{\xi(w \downarrow (1 \to n)) - \xi(w \downarrow (1 \to n))\}\ \rangle \end{aligned}$$

Eine so definierte K-Algebra $\mathrm{A} \odot \mathrm{A} = KQ/I$ ist wiederum eine 1-quasi-erbliche Algebra. Insbesondere wird bei dieser Konstruktion klar, warum die Voraussetzung $|Q_0| \geq 3$ unverzichtbar ist. Wäre dies nicht der Fall, dann wäre das Ideal I nicht zulässig.

Bezeichnen wir mit $\mathbf{X}_{\geq 3}$ die Menge aller 1-quasi-erblichen Algebren, deren Köcher mindestens 3 Elemente enthält, so erhalten wir, dass für die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_{\geq 3} \times \mathbf{X}_{\geq 3} & \longrightarrow & \mathbf{X}_{\geq 3} \\ (A, A') & \mapsto & A \odot A' \end{array}$$

folgende Eigenschaften erfüllt sind: Für alle $A, A', A'' \in \mathbf{X}_{\geq 3}$ gilt

- $A \odot A' \cong A' \odot A$,
- $A \odot (A' \odot A'') \cong (A \odot A') \odot A''$,
- $(A \odot A')^{op} \cong A^{op} \odot (A')^{op}$.

Die ersten zwei Eigenschaften entsprechen der Kommutativität und Assoziativität. Die Menge $\mathbf{X}_{\geq 3}$ mit $\odot$ ist aber offensichtlich keine Gruppe, denn für 1-quasi-erblichen Algebren $A = KQ/I$ und $A' = KQ'/I'$ mit $|Q_0| = n$, $|Q_0'| = m$ und $n, m \geq 3$ ist die Anzahl von Punkten im Köcher von $A \odot A'$ gleich $n + m - 2$, d.h. es gibt kein neutrales Element in $\mathbf{X}_{\geq 3}$ und damit kein Inverses Element für jede Algebra aus $\mathbf{X}_{\geq 3}$ bezüglich $\odot$.

Bei der Betrachtung einer Verknüpfung von 1-quasi-erblichen Algebren stellt sich die Frage nach der entsprechenden Verknüpfung von dazugehörigen lokalen, selbstinjektiven Algebren, d.h. nach der Endomorphismen-Algebra des projektiven unzerlegbaren Moduls also, der zu dem maximalen Punkt des Köchers korrespondiert.

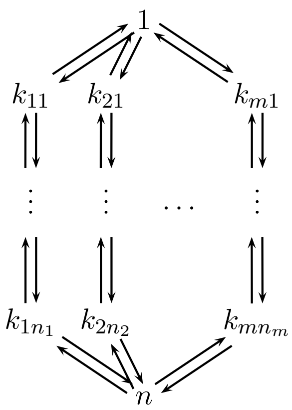
Analog der farbigen Äquivalenzen seien $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(P(n)) \cong K\langle x_1, \ldots, x_r \rangle / \langle p_1, \ldots, p_m \rangle$ und $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(P(n)) \cong K\langle x_1, \ldots, x_r \rangle / \langle p_1, \ldots, p_m \rangle$ die zu A und A gehörigen lokalen, selbstinjektiven K-Algebren. Die Restklasse des Polynoms $p \in K\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ bzw. $p \in K\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ sei der (einfache) Sockel von $K\langle x_1, \ldots, x_r \rangle / \langle p_1, \ldots, p_m \rangle$ bzw. von $K\langle x_1, \ldots, x_r \rangle / \langle p_1, \ldots, p_m \rangle$. Die Endomorphismenalgebra des projektiven unzerlegbaren $\mathrm{A} \odot \mathrm{A}$-Moduls, der zu dem maximalen Punkt des Köchers $Q_{\mathrm{A} \odot \mathrm{A}}$ korrespondiert ist

$$K\langle x_1, \ldots, x_r, x_1, \ldots, x_r \rangle / \langle p_1, \ldots, p_m, p_1, \ldots, p_m,\ p - p,\ x_i x_j,\ x_i x_j \ \text{ für alle } i,\ j \rangle$$

Die Restklasse von p bzw. p ist der einfache Sockel dieser K-Algebra. Die Anzahl der Nachbarn von n bzw. n im Q_0 bzw. Q_0 ist r bzw. r. Aus der Voraussetzung $|\mathrm{Q}_0| \geq 3$ folgt also, dass die Dimension der Algebra $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(P(n))$ und $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(P(n))$ mindestens 3 ist.
Die Verknüpfung $\odot$ induziert eine Verknüpfung auf die Menge der lokalen, assoziativen

K-Algebren deren Dimension mindestens 3 ist. Offensichtlich ist eine solche Verknüpfung zweier kommutativer Algebren wieder eine kommutative Algebra.

Beispiel. Sei $A(r)$ die Auslander Algebra von $K[x]/\langle x^r \rangle$. Für $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ der Köcher und Relationen der Algebra $A(n_1+1) \odot A(n_2+1) \odot \cdots \odot A(n_m+1)$ sind



$$\begin{aligned}
1, k_{i1}, 1 &= 0, \quad \text{für alle } i \in [1,m] \\
k_{ij}, k_{ij-1}, k_{ij} &= k_{ij}, k_{ij+1}, k_{ij}, \quad \text{für alle } i \in [1,m] \;\text{ und } j \in [1,n_i] \\
k_{in_i}, n, k_{rn_r} &= 0, \quad \text{für alle } i,j \in [1,m] \\
1, k_{i1}, \cdots, k_{in_i}, n &= 1, k_{j1}, \cdots, k_{jn_j}, n, \quad \text{für alle } i,j \in [1,m] \\
n, k_{in_i}, \cdots, k_{i1}, 1 &= n, k_{jn_j}, \cdots, k_{j1}, 1, \quad \text{für alle } i,j \in [1,m]
\end{aligned}$$

Der Endomorphismus-Algebra von $P_A(n)$ ist

$$K[x_1, x_2, \dots, x_m] \,/\, \left\langle x_1^{n_1+1}, x_2^{n_2+1}, \dots, x_m^{n_m+1}, x^{n_i} - x^{n_j},\; x_i x_j \;\text{ für }\; i,j \in [1,m] \text{ mit } i \neq j \right\rangle$$

Die Algebra $A \otimes A'$

Eine weitere Verknüpfung auf der Menge 1-quasi-erblichen K-Algebren ist das Tensorprodukt $\otimes_K$. Dass das Tensorprodukt zweier 1-quasi-erblichen K-Algebren wieder eine 1-quasi-erbliche K-Algebra ist, folgt aus den allgemeinen Eigenschaften des Tensorproduktes auf Basis-Algebren.

Die Struktur wird deutlicher, wenn wir Farben einsetzen. Seien nun $(\mathrm{A} = K\mathrm{Q}/\mathrm{I}, \leqslant)$ und $(\mathrm{A} = K\mathrm{Q}/\mathrm{I}, \leqslant)$ zwei 1-quasi-erblichen K-Algebren. Die K-Algebra $\mathrm{A} \otimes_K \mathrm{A}$ ist eine Basis-Algebra und für den sie beschreibenden Köcher $\mathrm{Q} = (\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1)$ und Relationen I gilt:

- Zu $(\mathrm{Q}_0, \leqslant)$: Es gibt eine bijektive Abbildung von $\mathrm{Q}_0 \times \mathrm{Q}_0$ nach Q_0, d.h. $\mathrm{Q}_0 = \{(i,j) \mid (i,j) \in \mathrm{Q}_0 \times \mathrm{Q}_0\}$.
  Die Halbordnung $\leqslant$ auf Q_0 ist gegeben durch
  $$(i,j) \leqslant (i',j') \text{ genau dann wenn } i \leqslant i' \text{ und } j \leqslant j'$$
  Ist also 1 bzw. 1 das minimale und n bzw. n das maximale Element in $(\mathrm{Q}_0, \leqslant)$ bzw. in $(\mathrm{Q}_0, \leqslant)$, dann ist offensichtlich $(1,1)$ das eindeutig bestimmte minimale bzw. (n,n) das eindeutig bestimmte maximale Element in $(\mathrm{Q}_0, \leqslant)$.

- Zu Q_1: Hier wiederum sind nur diejenigen Punkte verbunden, die bezüglich der Halbordnung $\leqslant$ benachbart sind, d.h. wenn $i \lhd i'$ und $j = j'$ oder $i = i'$ und $j \lhd j'$. In diesem Fall sind die benachbarten Punkte mit genau zwei Pfeilen in entgegengesetzten Richtungen verbunden. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_1 \;=\; & \{(i,j)\to(i',j') \mid i \lhd i' \text{ und } j = j'\} \;\cup\; \{(i',j')\to(i,j) \mid i \lhd i' \text{ und } j = j'\} \;\cup \\ & \{(i,j)\to(i',j') \mid i = i' \text{ und } j \lhd j'\} \;\cup\; \{(i',j')\to(i,j) \mid i = j' \text{ und } j \lhd j'\}\end{aligned}$$

- Zu I. Sei $w = (i_1 \to \cdots \to i_m)$ ein Weg in KQ, dann bezeichnen wir für jedes $j \in Q_0$ mit (w,j) den Weg $((i_1,j)\to \cdots \to(i_m,j))$ aus KQ. Analog dazu korrespondiert der Weg $(i,w) = ((i,j_1)\to \cdots \to(i,j_m))$ aus KQ mit dem Weg $w = (j_1 \to \cdots \to j_m) \in KQ$.
  Dementsprechend gilt $(\rho,j) = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k{\cdot}(w_k,j)$ für $\rho = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k{\cdot}w_k \in I$ und $(i,\rho) = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k{\cdot}(i,w_k)$ für $\rho = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k{\cdot}w_k \in I$.
  Die Menge der Relationen von $A \otimes_K A$ ist also eine Vereinigung aus den Mengen

$$\{(\rho,j) \mid \rho \in I,\ j \in Q_0\}\,, \quad \{(i,\rho) \mid i \in Q_0, \rho \in I\}$$

und

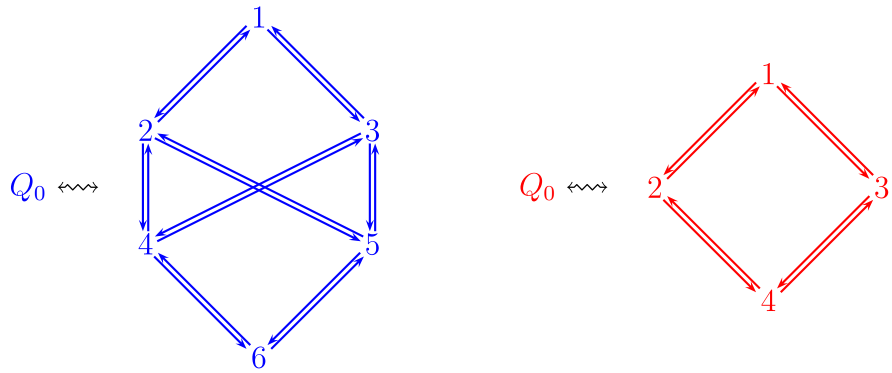
$$\left\{ ((i,j)\to(i,j')\to(i',j')) - ((i,j)\to(i',j)\to(i',j')) \;\middle|\; \begin{array}{l} i \lhd_A i', j \lhd_B j' \\ i \rhd_A i', j \lhd_B j' \\ i \lhd_A i', j \rhd_B j' \\ i \rhd_A i', j \rhd_B j' \end{array} \right\}$$

Die K-Algebra $A \otimes_K A = K\mathrm{Q}/\mathrm{I}$ ist 1-quasi-erblich. Damit ist $\otimes$ eine Verknüpfung auf der Menge der Isomorphieklassen aller 1-quasi-erblichen K-Algebren, für sie gilt das Assoziativitätsgesetz und das Kommutativitätsgesetz.

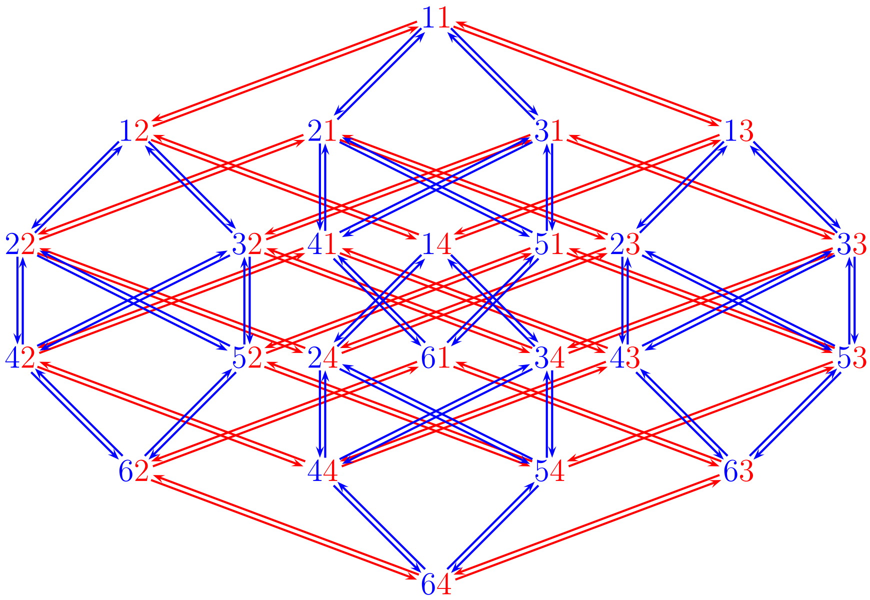
Die lokale, selbstinjektive K-Algebra, die zu $A \otimes_K A$ gehört, steht in folgender Beziehung zu A und A gehörigen lokalen, selbstinjektiven K-Algebren: Wenn $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(P(n)) \cong K\langle x_1,\ldots,x_r\rangle / \langle p_1,\ldots,p_n\rangle$ und $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(P(n)) \cong K\langle x_1,\ldots,x_r\rangle / \langle p_1,\ldots,p_n\rangle$, dann

$$\mathrm{End}_{\mathrm{A}\otimes_K\mathrm{A}}(P(n,n)) \cong K\langle x_1,\ldots,x_r,x_1,\ldots,x_r\rangle / \langle p_1,\ldots,p_n,p_1,\ldots,p_n, x_ix_j - x_jx_i \text{ für alle } i,j\rangle\,.$$

Beispiel 1. Sei A die im Beispiel 1.1 (Kap. 1) beschriebene Algebra und A die Algebra aus dem Beispiel II (Kap 1). Sie sind durch folgende Köcher dargestellt:



Der darstellende Köcher von $A \otimes_K A$

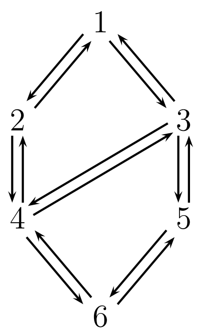


Beispiel 2. Sei $A = A(n_1) \otimes_K A(n_2) \otimes_K \cdots \otimes_K A(n_m)$, wobei $A(r)$ die Auslander Algebra von $K[x]/\langle x^r \rangle$ ist. Die lokale, selbstinjektive Algebra $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]/\langle x_1^{n_1}, x_1^{n_2}, \ldots, x_1^{n_m} \rangle$ ist die Endomorphismen-Algebra des projektiven unzerlegbaren A-Moduls, der zu dem maximalen Punkt des Köchers von A korrespondiert.

Ein weiteres Konstruktions-Beispiel

Zum Schluss beschreiben wir ein Verfahren zur Konstruktion von 1-quasi-erblichen Algebren aus einer bereits betrachteten 1-quasi-erblichen Algebra.

Die Algebra $A = KQ/I$ sei gegeben durch den folgenden Köcher und Relationen:



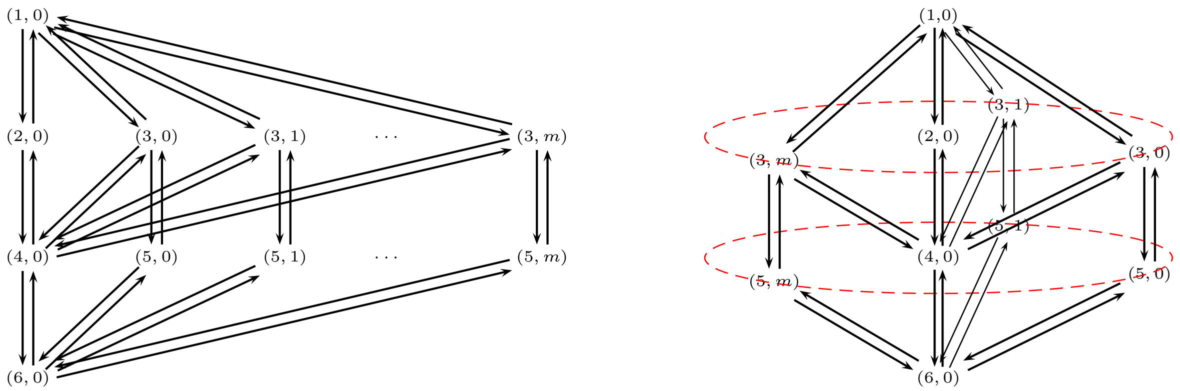
$$\begin{aligned} 121 &= 0 \\ 131 &= 0 \\ 124 &= 134 \\ 346 &= 356 \\ 421 &= 431 \\ 643 &= 653 \\ 212 &= 242 \\ 243 &= 0 \\ 342 &= 0 \\ 313 &= 343 \\ 313 &= 353 \end{aligned}$$

Sei $m \in \mathbb{N}$. Die Algebra $A^{(m)}$ sei durch den folgenden Köcher $Q^{(m)}$ und Relationen $I^{(m)}$ definiert:

- Zu $Q_0^{(m)}$: Für jedes $k \in [0, m]$ sei $\Lambda^{(k)}$ eine Kopie von Q_0, oder anders gesagt $\Lambda^{(0)} := Q_0$ und $\Lambda^{(k)} := \{(i, k) \mid i \in Q_0\}$ für $k \in [1, m]$. Die Menge des Köchers besteht aus der Vereinigung von $\Lambda^{(0)}, \Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(m)}$ mit der Identifizierung der Punkte (i, k) und (i, k') für alle $k, k' \in [0, m]$ und alle $i \in \{1, 2, 4, 6\}$. Die Halbordnung $\leqslant^{(m)}$ ist wie folgt definiert:

  für $(i, k), (i', k') \in Q_0^{(m)}$ gilt $(i, k) \leqslant^{(m)} (i', k')$ genau dann, wenn $i \leqslant i'$ und $k = k'$.

- Zu $Q_1^{(m)}$: Die Menge der Pfeile ist $\{(i, k) \to (i', k) \mid (i \to i') \in Q_1,\ k \in [0, m]\}$ dabei soll die Berücksichtigung der gleich gesetzten Punkte beachtet werden. Zwei Punkte im $Q_0^{(m)}$ sind also genau dann verbunden, wenn sie bezüglich $\leqslant^{(m)}$ Nachbarn sind und zwar genau mit zwei Pfeilen in entgegengesetzten Richtungen.
  Der Köcher von $A^{(m)}$ wird hier aus zwei Perspektiven dargestellt.



- Zu $I^{(m)}$: Die Relationen sind:

$$\begin{array}{rcl rcl}
(1,0)(2,0)(4,0) &=& (1,0)(3,k)(4,0), & (3,k)(1,0)(3,k) &=& (3,k)(4,0)(3,k) = (3,k)(5,k)(3,k),\\
(3,k)(4,0)(6,0) &=& (3,k)(5,k)(6,0), & (3,k)(4,0)(2,0) &=& 0,\\
(6,0)(4,0)(3,k) &=& (6,0)(5,k)(3,k), & (3,k)(4,0)(3,k') &=& 0 \text{ mit } k \neq k'\\
(4,0)(2,0)(1,0) &=& (4,0)(3,k)(1,0), & & &\\
(1,0)(3,k)(1,0) &=& 0 & (4,0)(6,0)(4,0) &=& (4,0)(2,0)(4,0) + \sum_{k=0}^{m}(4,0)(3,k)(4,0),\\
(1,0)(2,0)(1,0) &=& 0 & (4,0)(3,k)(5,k) &=& (4,0)(6,0)(5,k)\\
& & & (5,k)(3,k)(5,k) &=& (5,k)(6,0)(5,k),\\
(2,0)(1,0)(2,0) &=& (2,0)(4,0)(2,0) & (5,k)(3,k)(4,0) &=& (5,k)(6,0)(4,0),\\
(2,0)(4,0)(3,k) &=& 0 & (5,k)(6,0)(4,0) &=& (5,k)(3,k)(4,0)
\end{array}$$

  für alle $k \in [0, m]$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $A^{(m)} = KQ^{(m)}/I^{(m)}$ eine 1-quasi-erbliche Algebra.

Die hier beschriebenen Verfahren sollten Impuls für weitergehende Betrachtungen sein und Anstoß für die Entdeckung von neuen Verfahren zur Konstruktion von Algebren.

LITERATURVERZEICHNIS

[AF] F.W. Anderson, K.R. Fuller, *Rings and Categories of Modules,* Graduate Texts in Mathematics 13, Springer (1992).

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras,* Cambrigde Studies in Advanced Math. 36 (1995).

[ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1. Techniques of Representation Theory*, London Mathematical Society Student Texts 65, Cambridge University (2006).

[B] S. Bosch, *Algebra,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1991).

[BGG1] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand and S.I. Gelfand, *A certain category of* $\mathfrak{g}$*-modules,* Funkcional. Anal. i Priložen. 10, 1-8 (1976).

[BHRR] T. Brüstle, L. Hille, C.M. Ringel and G. Röhrle, *The* Δ*-filtered modules without self-extensions for the Auslander algebra of* $k[T]/\langle T^n\rangle$, Algebr. Represent. Theory 2, 295–312 (1999).

[Bo] S. K. Bongartz, *Zykellose Algebren sind nicht zügellos,* Representation theory II Proc. 2nd Int. Conf., Ottawa 1979, Lect. Notes Math. 832, 97-102 (1980).

[CPS] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, *Finite dimensional algebras and highest weight categories,* J. Reine Angew. Math., 391, 85-99 (1988).

[DHM] V. Dlab, P. Heath and F. Marko, *Quasi-hereditary endomorphism algebras,* Canad. Math. Bull. 38, 421-428 (1995).

[DR] V. Dlab and C.M. Ringel, *The module theoretical approach to quasi-hereditary algebras,* Representations of algebras and related topics (Kyoto, 1990), 200–224, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 168, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1992).

[DX] B.M. Deng and C.C. Xi, *Ringel duals of quasi-hereditary algebras,* Comm. Algebra 24, 2825-2838 (1996).

[F] R. Farnsteiner, *Quasi-hereditary algebras: BGG reciprocity,* Lecture Notes, available at `http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~ sek/selected.html`.

[J] J.C. Jantzen, *Moduln mit einem höchsten Gewicht,* Lecture Notes in Mathematics, 750. Springer-Verlag (1979). ii+195 pp.

[KK] M. Klucznik, S. König, *Characteristic tilting modules over quasi-hereditary algebras,* Preprint-Server of the SFB 343 E99-004, Universität Bielefeld.

[K1] S. König, *Exact Borel subalgebras of quasi-hereditary algebras, I,* Math. Z. 220, 399-426 (1995).

[K2] S. König, *Exact Borel subalgebras of quasi-hereditary algebras, II,* Comm. Algebra 23 2331-2344 (1995).

[KSX] S. König, I.H. Slungård and C. Xi, *Double centralizer properties, dominant dimension and tilting modules*, J. Algebra 240, 393-412 (2001).

[M1] F. Marko, *Quasi-hereditary algebras and their Borel subalgebras*, Thesis, Carleton University (1996).

[M2] F. Marko, *Algebra associated with the regular block of category $\mathcal{O}$ for* $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, Algebras, rings and their representations, 201-214, World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2006).

[Ma] K. Meyberg, *Algebra*, Carl Hanser Verlag München Wien (1975).

[Mo] K. Morita, *Duality in QF-3 Rings*, Math. Z. 108, 237-252 (1969).

[MP] R.V. Moody and A. Pianzola, *Lie algebras with triangular decompositions*, Canad. Math. Soc. Ser. of Monogr. Adv. Texts, Wiley-Interscience, New York, (1995).

[R1] C.M. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms,* Springer Lect. Notes 1099, (1984).

[R2] C.M. Ringel, *The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences,* Math. Zeit., 208, 209-223 (1991).

[S] C. Stroppel, *Category $\mathcal{O}$: Quivers and Endomorphism Rings of Projectives,* Represent. Theory 7 322-345 (2003).

[So] W. Soergel, *Kazhdan-Lusztig-Polynome und eine Kombinatorik für Kipp-Moduln,* Represent. Theory 1, 37-68 (electronic) (1997).

[T] H. Tachikawa, *Quasi-Frobenius rings and generalizations.* QF-3 *and* QF-1 *rings,* Lecture Notes in Math., 351. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1973).

[V] M. Vybornov, *Perverse sheaves, Koszul IC-modules, and the quiver for the category* $\mathcal{O}$, Invent. Math. 167, 19-46 (2007).

[X] C.C. Xi, *Quasi-hereditary algebras with a duality,* J. Reine Angew. Math. 449, 201-215 (1994).